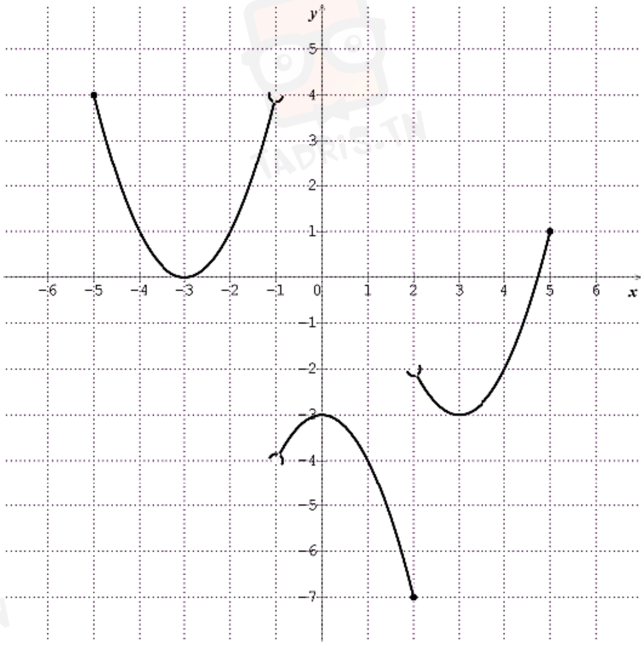
Exercice 1 (toutes les questions sont indépendantes) *(8 pts)*

Ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f définie sur $[-5\,,5\,]\backslash\{-1\,\}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



1) Répondre *par vrai* ou faux ***en justifiant*** :
a) La fonction $|f|$ est continue sur $[-5\ ,2]$
b) La fonction f est prolongeable par continuité en (-1)
c) $\frac{1}{f}$ est décroissante sur $[-5\ ,-3\,[$
2) Résoudre graphiquement :
   a) $f(x)=1$; b) $f(x)=-2$
   c) $(f(x)-1)(f(x)+2)\geq 0$; d) $\frac{f(x)-1}{x}\leq 0$
   e) $E(f(x))=-4$; f) $\sqrt{f(x)+3}\geq 2$
3) Montrer qu'il existe $\propto$ appartenant à $]-3,-2[$ tel que

$$(2\alpha+6)\,f(\propto)=1$$

4) Calculer $\lim_{x\to -2}\frac{f^3(x)+6\,f(x)-7}{\sqrt{f(x)}-1}$

5) Soit g la fonction définie par $g(x)=\begin{cases} f(x)+m & si\ \ x>1 \\ \frac{x^2\sqrt{2-x}\,-\,1}{x-1} & si\ x<1\end{cases}$

Déterminer m pour que g soit prolongeable par continuité en 1.

Exercice 2 *(6 pts)*

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC isocèle en A, tel que : $AB=5$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv -\frac{2023}{4}\pi\,[2\pi]$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit au triangle ABC . Et ($\mathscr{C}'$) le cercle de centre A passant par B .

1) a) Faire une figure.
   b) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA})$.
2) Soit M un point variable dans le plan tel que $\left(\widehat{-2\overrightarrow{MC},-\overrightarrow{MA}}\right)\equiv -\frac{5\pi}{8}[2\pi]$
   a) Vérifier que $M\in(\mathscr{C})$
   b) Placer un point M en justifiant.
3) La droite (CM) recoupe ($\mathscr{C}'$) en D et la droite (BD) recoupe ($\mathscr{C}$) en N .
   a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}\right)[2\pi]$. Déduire que le triangle BDM est isocèle.
   b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DB}\,,\overrightarrow{DM})$.
   c) Déduire que les droites (AD) et (MN) sont perpendiculaires.
4) La droite passant par C et perpendiculaire à (AM) coupe (BM) en I .
   Montrer que lorsque M varie, le point I se déplace sur le cercle ($\mathscr{C}'$).

Exercice 3 (6 pts)

Soit $ABCD$ un rectangle de centre I tel que $AD = x$ et $AB = 10 - x$ où x est un réel tel que $0 < x < 10$ et soit E et F les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AB]$.

1) a) Exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FA}$ *et* $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de x.

b) Montrer que $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FD} = 10x - 50$.

c) Déduire que $ABCD$ est un carré si et seulement si $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{FD}$.

2) **Dans cette question on prend $\boldsymbol{x = 5}$** .

On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A\,,1)$ *et* $(I, 2)$. La droite (AE) coupe les droites (FD) et (BD) respectivement en K et H.

a) Déterminer les ensembles $\mathcal{E} = \{M \in P /\, 2\,\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DG}.\overrightarrow{GK}\}$ et $\mathcal{E}' = \{M \in P \,/\, \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MH} = 0\}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{HD}$.

3) **Dans cette question on prend $\boldsymbol{x = 6}$** .

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre B et de rayon 4 et par O le barycentre des points pondérés $(B, 5)$ et $(C, 4)$.

a) Montrer que $(\Delta) = \{M \in P \,/\, \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = 16\}$ est la perpendiculaire à (BC) passant par O .

b) La droite (Δ) coupe $\mathcal{C}$ en P et Q , calculer $\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC}$ *et* $\overrightarrow{QB}.\overrightarrow{QC}$.

c) Déduire que les droites (CP) et (CQ) sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$.