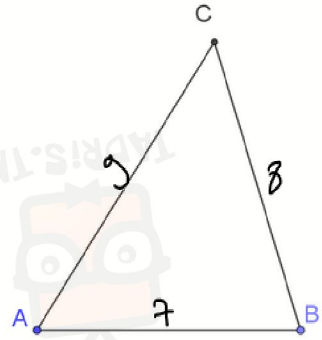
XERCICE N°3 : Soit **ABC** un triangle tel que **AB = 7, AC = 9** et **BC = 8** et Soit **I = B ∗ C** et **J = B ∗ I.**

1) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16$ *et que* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 48$.
2) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que le triangle **ABI** est isocèle en **A**.
3) Soit **G = A ∗ I.**
   a) Calculer **AJ** et **GA** et montrer que $BG = \frac{9}{2}$.
   b) Vérifier que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4) A tout point **M** on associe le réel $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.
   a) Calculer *f(A)*.
   b) Vérifier que : $f(M) = 2MG^2 + f(G)$. En déduire de **a)** que : $f(G) = \frac{17}{2}$.
   c) Calculer alors : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.
   d) Déterminer l'ensemble (φ) des points **M** du plan tel que : $f(M) = 31$.
   e) Vérifier que la droite **(BC)** est tangente à (φ).



$AC^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2$

$= AB^2 + BC^2 - 2\,\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2)$

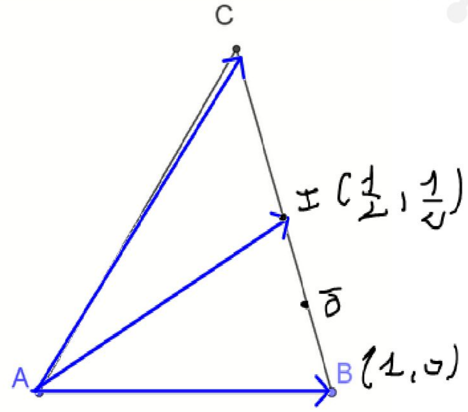
$= \frac{1}{2}(7^2 + 8^2 - 9^2) = 16$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - AB^2)$

$= \frac{1}{2}(9^2 + 8^2 - 7^2) = 48$

EXERCICE N°3 : Soit **ABC** un triangle tel que **AB = 7, AC = 9** et **BC = 8** et Soit **I = B ∗ C** et **J = B ∗ I.**

1) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16$ *et que* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 48$.
2) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que le triangle **ABI** est isocèle en **A**.
3) Soit **G = A ∗ I.**
   a) Calculer **AJ** et **GA** et montrer que $BG = \frac{9}{2}$.
   b) Vérifier que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4) A tout point **M** on associe le réel $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.
   a) Calculer *f(A)*.
   b) Vérifier que : $f(M) = 2MG^2 + f(G)$. En déduire de **a)** que : $f(G) = \frac{17}{2}$.
   c) Calculer alors : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.
   d) Déterminer l'ensemble (φ) des points **M** du plan tel que : $f(M) = 31$.
   e) Vérifier que la droite **(BC)** est tangente à (φ).



M1 b) $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI})$ $(J = B * I)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$ $(I = B * C)$

$= \frac{1}{4}(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

M2 Dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$A(0,0)$ $B(1,0)$ $C(0,1)$

$I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $J\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

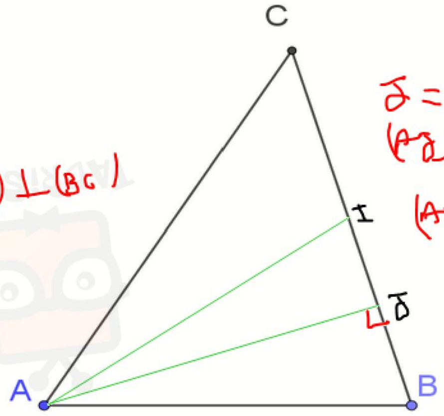
$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

EXERCICE N°3 : Soit ABC un triangle tel que **AB = 7, AC = 9** et **BC = 8** et Soit **I = B ⋆ C** et **J = B ⋆ I.**

1) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16$ *et que* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 48$.
2) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que le triangle **ABI** est isocèle en **A**.
3) Soit **G = A ⋆ I.**

$\Rightarrow \overrightarrow{AJ} \perp \overrightarrow{BC}$ donc $(AJ) \perp (BC)$

   a) Calculer **AJ et GA** et montrer que $BG = \frac{9}{2}$.
   b) Vérifier que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4) A tout point **M** on associe le réel $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.
   a) Calculer ***f (A).***
   b) Vérifier que : $f(M) = 2MG^2 + f(G)$. En déduire de **a)** que : $f(G) = \frac{17}{2}$.
   c) Calculer alors : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.
   d) Déterminer l'ensemble (φ) des points **M** du plan tel que : $f(M) = 31$.
   e) Vérifier que la droite **(BC)** est tangente à (φ).



$J = B \star I$

$(AJ) \perp (BI)$

$(AJ) = méd[BI]$

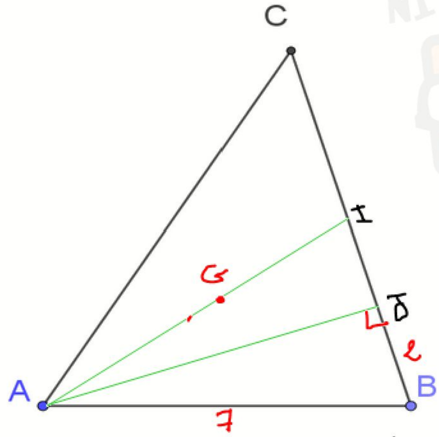
$AB = AI$

b) $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$

$= \frac{3}{4}(-16) + \frac{1}{4}(+48) = 0$

EXERCICE N°3 : Soit ABC un triangle tel que **AB = 7, AC = 9** et **BC = 8** et Soit **I = B ⋆ C** et **J = B ⋆ I.**

1) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16$ *et que* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 48$.
2) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que le triangle **ABI** est isocèle en **A**.
3) Soit **G = A ⋆ I.**
   a) Calculer **AJ et GA** et montrer que $BG = \frac{9}{2}$.
   b) Vérifier que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4) A tout point **M** on associe le réel $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.
   a) Calculer ***f (A).***
   b) Vérifier que : $f(M) = 2MG^2 + f(G)$. En déduire de **a)** que : $f(G) = \frac{17}{2}$.
   c) Calculer alors : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.
   d) Déterminer l'ensemble (φ) des points **M** du plan tel que : $f(M) = 31$.
   e) Vérifier que la droite **(BC)** est tangente à (φ).



ABJ rectangle en J $\xRightarrow{\text{Pythagore}}$ $AJ^2 = AB^2 - BJ^2$

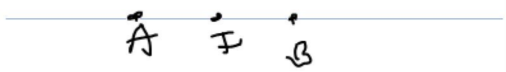
$= 49 - 4 = 45$

$\boxed{AJ = \sqrt{45}}$

$GA = \frac{7}{2}$

$MA^2 + MB^2 = \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\|^2 + \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\|^2$

$= \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\|^2 + \|\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\|^2$



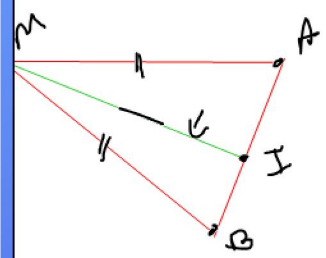
$= MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + MI^2 + IA^2 - 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}$

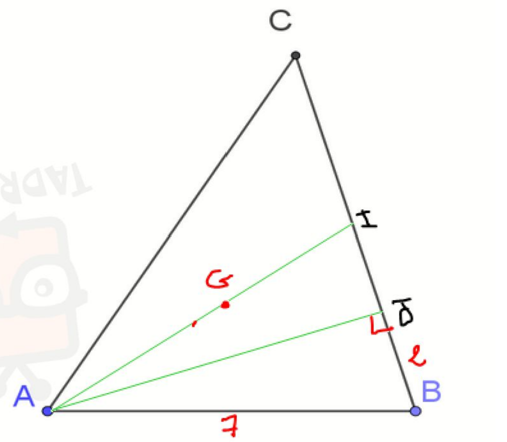
$= 2MI^2 + 2IA^2$

$IA = \frac{1}{2}AB$

$= 2MI^2 + 2\left(\frac{1}{2}AB\right)^2$

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}}$$





Dans le Triangle ABI
$G = A * I$ $\Big\}$ $\xRightarrow[\text{mediane}]{Th}$ $2BG^2 + \frac{AI^2}{2} = BA^2 + BI^2$

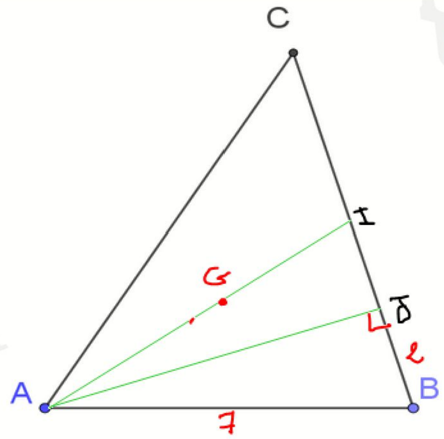
$$BG^2 = \frac{1}{2}\left[BA^2 + BI^2 - \frac{AI^2}{2}\right]$$

<u>AN</u>

$$BG = \frac{9}{2}$$

<u>*EXERCICE N°3 :*</u> Soit **ABC** un triangle tel que **AB = 7, AC = 9** et **BC = 8** et **Soit I = B * C** et **J = B * I.**

1) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16$ *et que* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 48$.
2) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\left(3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que le triangle **ABI** est isocèle en **A.**
3) Soit **G = A * I.**
   a) Calculer **AJ et GA** et montrer que $BG = \frac{9}{2}$.
   b) Vérifier que : $2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4) A tout point **M** on associe le réel $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.
   a) Calculer ***f (A).***
   b) Vérifier que : $f(M) = 2MG^2 + f(G)$. En déduire de **a)** que : $f(G) = \frac{17}{2}$.
   c) Calculer alors : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.
   d) Déterminer l'ensemble (φ) des points **M** du plan tel que : $f(M) = 31$.
   e) Vérifier que la droite **(BC)** est tangente à (φ).



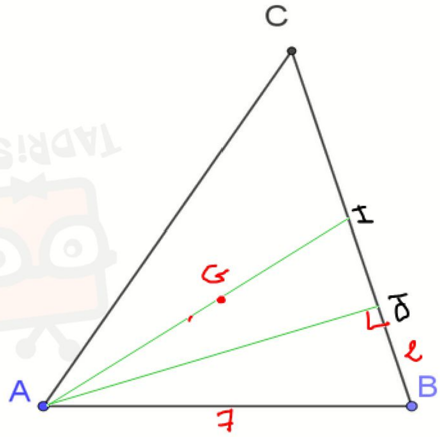
$$BG^2 = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI}\right\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(BA^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)$$

Terminé

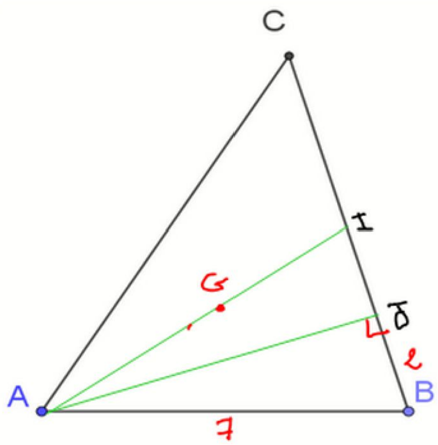
EXERCICE N°3 : Soit **ABC** un triangle tel que **AB = 7, AC = 9 et BC = 8 et Soit I = B * C et J = B * I.**



1) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16$ *et que* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 48$.
2) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\left(3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que le triangle **ABI** est isocèle en **A.**
3) Soit **G = A * I.**
   a) Calculer **AJ et GA** et montrer que BG = $\frac{9}{2}$.
   b) Vérifier que : $2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4) A tout point **M** on associe le réel $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.
   a) Calculer *f (A).*
   b) Vérifier que : $f(M) = 2MG^2 + f(G)$. En déduire de **a)** que : $f(G) = \frac{17}{2}$.
   c) Calculer alors : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.
   d) Déterminer l'ensemble (φ) des points **M** du plan tel que : $f(M) = 31$.
   e) Vérifier que la droite **(BC)** est tangente à (φ).

$$2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} + \boxed{\overrightarrow{IB}} + \overrightarrow{GI} + \boxed{\overrightarrow{IC}}$$
$$= 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI}\right) = \vec{0}$$

EXERCICE N°3 : Soit **ABC** un triangle tel que **AB = 7, AC = 9 et BC = 8 et Soit I = B * C et J = B * I.**



1) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16$ *et que* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 48$.
2) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\left(3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que le triangle **ABI** est isocèle en **A.**
3) Soit **G = A * I.**
   a) Calculer **AJ et GA** et montrer que BG = $\frac{9}{2}$.
   b) Vérifier que : $2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4) A tout point **M** on associe le réel $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.
   a) Calculer *f (A).*
   b) Vérifier que $\boxed{f(M) = 2MG^2 + f(G)}$. En déduire de **a)** que : $f(G) = \frac{17}{2}$.
   c) Calculer alors : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.
   d) Déterminer l'ensemble (φ) des points **M** du plan tel que : $f(M) = 31$.
   e) Vérifier que la droite **(BC)** est tangente à (φ).

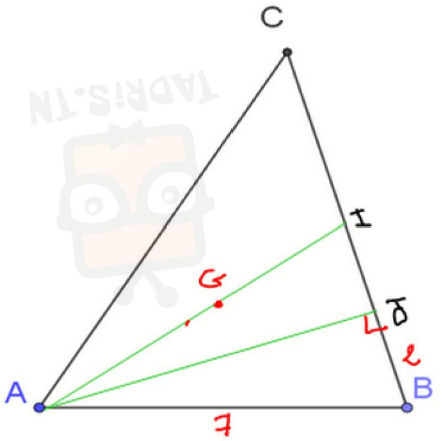
4) $f(A) = AA^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$
$= AB^2 - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$
$= 49 - 16 = 33$

b) $f(G) = GA^2 + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$

b) $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$
$= \|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\|^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}).(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$
$= MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + MG^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$
$= 2MG^2 + GA^2 + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$
$= 2MG^2 + f(G)$

EXERCICE N°3 : Soit **ABC** un triangle tel que **AB = 7, AC = 9 et BC = 8 et Soit I = B ∗ C et J = B ∗ I.**

1) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16$ *et que* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 48$.
2) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que le triangle **ABI** est isocèle en **A**.
3) Soit **G = A ∗ I.**
   a) Calculer **AJ** et **GA** et montrer que **BG** = $\frac{9}{2}$.
   b) Vérifier que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4) A tout point **M** on associe le réel $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.
   a) Calculer ***f (A).***
   b) Vérifier que : ***f (M) = 2 MG² + f (G).*** En déduire de **a)** que : $f(G) = \frac{17}{2}$.
   c) Calculer alors : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.
   d) Déterminer l'ensemble (φ) des points **M** du plan tel que : ***f (M) = 31.***
   e) Vérifier que la droite **(BC)** est tangente à (φ).



$f(A) = 2AG^2 + f(G)$

$\Leftrightarrow f(G) = f(A) - 2AG^2 = \frac{17}{2}$

$f(G) = GA^2 + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} \to \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} = f(G) - GA^2$

$= \frac{17}{2} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -\frac{15}{4}$

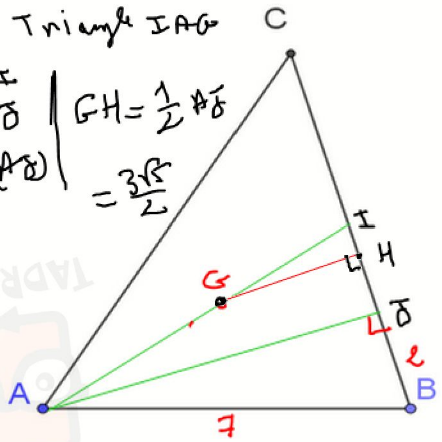
EXERCICE N°3 : Soit **ABC** un triangle tel que **AB = 7, AC = 9 et BC = 8 et Soit I = B ∗ C et J = B ∗ I.**

1) Montrer que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16$ *et que* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 48$.
2) a) Vérifier que : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) Montrer que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$. En déduire que le triangle **ABI** est isocèle en **A**.
3) Soit **G = A ∗ I.**
   a) Calculer **AJ et GA** et montrer que **BG** = $\frac{9}{2}$.
   b) Vérifier que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
4) A tout point **M** on associe le réel $f(M) = MA^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.
   a) Calculer ***f (A).***
   b) Vérifier que : ***f (M) = 2 MG² + f (G).*** En déduire de **a)** que : $f(G) = \frac{17}{2}$.
   c) Calculer alors : $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$.
   d) Déterminer l'ensemble (φ) des points **M** du plan tel que : ***f (M) = 31.***
   e) Vérifier que la droite **(BC)** est tangente à (φ).

Dans le Triangle IAJ

$G = A * I$
$H = G * IJ$ ... $GH = \frac{1}{2} AJ$
$(GH) // (AJ)$

$= \frac{3\sqrt{5}}{2}$



d) $f(M) = 31 \Leftrightarrow 2MG^2 + f(G) = 31$

$2MG^2 = 31 - \frac{17}{2} = \frac{45}{2}$

$MG^2 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow MG = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\left(G,\ \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)}$