

Série Limite et continuité

Exercice 1 (vrai ou faux)

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a sauf peut-être en a

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

- 1) Si f admet une limite en a , alors f admet une limite à droite en a
- 2) Si f admet une limite à gauche en a et une limite à droite en a , alors f admet une limite en a
- 3) Si f est continue en a , alors f est continue à droite en a
- 4) Si f est croissante sur $[0, +\infty[$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- 5) Si f est une fonction définie et continue sur \mathbb{R} vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|} \right)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3} \right)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}} \right)$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^4 + 2x^2 - x + 2$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^3+x-1}{x^2-x+2} \right)$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - 2x)$
- 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + x)$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} \right)$
- 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1} \right)$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{|x|}{x} \right)$

Exercice 3

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ayant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-5	0	1	3	10	$+\infty$
f	1	-5	3	-10	3	2	$+\infty$

- 1) Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$
- 2) Déterminer : $f(]-\infty, -5])$; $f([-5, 1])$ et $f(\mathbb{R})$

Exercice 4

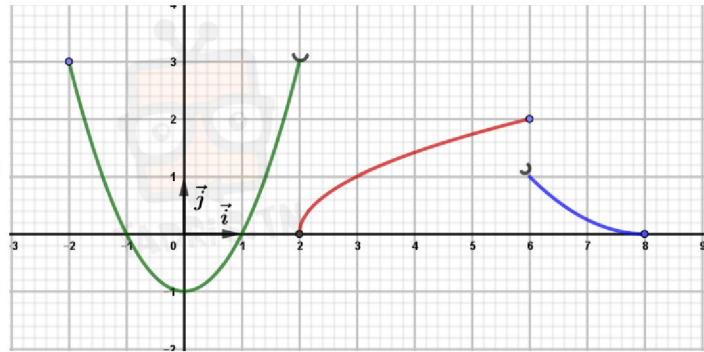
On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$

- 1) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat
- 2) Montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
- 3) Vérifier que g est continue sur $]0, +\infty[$ puis déterminer $g(]0, +\infty[)$
- 4) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$
b) Vérifier que $2 < \alpha < 3$

Exercice 5

En utilisant le graphique :

- 1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$;
- 2) f est-elle continue à gauche en 2 ?
à droite en 2 ? en 2 ?
- 3) f est-elle continue à gauche en 6 ?
à droite en 6 ? en 6 ?
- 4) Déterminer les intervalles où f est continue
- 5) Déterminer $f(]-2,2[)$; $f(]6,8])$
- 6) Résoudre dans $[-2,8]$: $f(x) = 0$ et $f(x) < 0$



Exercice 6

Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1,0] \\ x^2 + 1 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$

- 1) Etudier la continuité de g sur $[-1,1]$
- 2) Déterminer $g(]-1,1])$

Exercice 7

- 1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f sur \mathbb{R}

- 2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x \cdot E(x - \frac{1}{x})$
Montrer que f admet une limite en 0 que l'on déterminera



في دارك... إتهون علمي قرابتة إصغارك

Exercice 8

- 1) Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x} - 1$
- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α . Vérifier que $\alpha \in]0,1[$
- b) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$
- 2) Soit $g(x) = x^5 - 2x^3 + x - 4$. Montrer que la courbe (C_g) coupe l'axe des abscisses en au moins un point M

Exercice 9

- 1) Soit $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$
- a) Déterminer D_f b) Montrer que f est prolongeable par continuité en -1
- 2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < -1 \\ x + 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- a) Montrer que g est continue en -1
- b) Etudier la continuité de g en 2
- c) Montrer que g est continue sur $[-2, -1]$
- d) Montrer que l'équation $g(x) = -x$ admet une unique solution $\alpha \in]-2, -1[$
- e) Montrer que α est une solution de l'équation $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$. En déduire la valeur exacte de α



في دارك... إتهون علمي قرابتة إصغارك