Trigonométrie

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On donne le point M de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3},1)$

1) Déterminer les coordonnées polaires de M

2) Soit N le point tel que $ON=\frac{1}{2}OM\ et\ \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$. Déterminer les coordonnées polaires de N

3) a) En utilisant les formules d'additions, calculer $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)\ et\ \ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

b) En déduire les coordonnées cartésiennes de N

Exercice 2

1) a) Montrer que pour tout réel x on a : $4\sin x\ \cos x\cos 2x=\sin 4x$

b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}$

2) a) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$

b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$

3) calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Exercice 3

1) a) Montrer que pour tout réel x : $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

b) En déduire alors que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}$

2) soit $f(x)=1+\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)$

a) Vérifier que $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\cos x\sin x$

b) Montrer alors que $f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})$

c) calculer de deux manières $f(\frac{\pi}{12})$ et en déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$

Exercice 4

Pour tout réel x on pose $f(x)=4\sin x.\cos^3 x-\sin 2x$

1) a) Montrer que pour tout réel x : $f(x)=\frac{1}{2}\sin 4x$

b) Calculer alors $f\left(\frac{\pi}{16}\right)\ et\ f(-\frac{\pi}{12})$

2) soit g la fonction définie sur $IR\backslash\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$ par $g(x)=\frac{f(x)}{2\sin x}$

a) Montre $g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=g\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}$

b) Exprimer $g(x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire que $-\frac{1}{2}\ et\ \cos x$ sont des solutions de l'équation : $8x^3-4x-1=0$

c) calculer alors $\cos(\frac{\pi}{5})$

Exercice 5

Soit $g(x) = 2 + \sqrt{2}(\cos(2x) - \sin(2x))$

1) mettre sous forme $r\cos\,(2x - \varphi)$ l'expression $\cos(2x) - \sin(2x)$

2) montrer que $g(x) = 4\cos^2(x + \frac{\pi}{8})$

3) calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin(\frac{\pi}{8})$

Exercice 6

1) **a)** Vérifier que : $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$

b) Déterminer α tel que : $\sin x - \cos x = 2\sin(x - \alpha)$

2) on considère l'équation (E): $\tan x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$

Montrer que $(E) \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

3) Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'équation (E)

Exercice 7

Soit $f(x) = 3\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x$

1) **a)** Montrer que $f(x) = 2 + \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x)$ b) Calculer $f(\frac{\pi}{4})$

2) **a)** Montrer que $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$

b) En déduire que $f(x) = 4\cos^2(x + \frac{\pi}{6})$

c) Résoudre dans IR puis dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $f(x) \leq 1$

3) soit $g(x) = \frac{\sin(2x+\frac{\pi}{3})}{f(x)}$

a) Déterminer D_g **b)** Montrer que $\forall x \in D_g: g(x) = \frac{1}{2}\tan(x + \frac{\pi}{6})$

c) Calculer $g(\frac{\pi}{4})$ **d)** En déduire que $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$ **e)** Trouver alors $\tan(\frac{7\pi}{12})$

4) Résoudre dans IR puis dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$