Série Limite et continuité

Exercice 1 (vrai ou faux)

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a sauf peut-être en a

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

1) Si f admet une limite en a, alors f admet une limite à droite en a

2) Si f admet une limite à gauche en a et une limite à droite en a, alors f admet une limite en a

3) Si f est continue en a, alors f est continue à droite en a

4) Si f est croissante sur $[0,+\infty[$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

5) Si f est une fonction définie et continue sur IR vérifiant $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{4x^2+x^3}}{|2x+x^2|}\right)$ **2)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3}\right)$ **3)** $\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}}\right)$

4) $\lim_{x\to-\infty} -5x^4+2x^2-x+2$ **5)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^3+x-1}{x^2-x+2}\right)$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2x\right)$ **7)** $\lim_{-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)$

8) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}\right)$ **9)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}\right)$ **10)** $\lim_{x\to0}\left(x-\frac{|x|}{x}\right)$

Exercice 3

Soit $f: IR \to IR$ une fonction continue ayant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-5		0		1		3		10		$+\infty$
f	1	↘	-5	↗	3	↘	-10	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

1) Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$

2) Déterminer : $f(]-\infty,-5])$; $f([-5,1])$ et $f(IR)$

Exercice 4

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$

1) Calculer : $\lim_{+\infty} f(x)$ et $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat

2) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

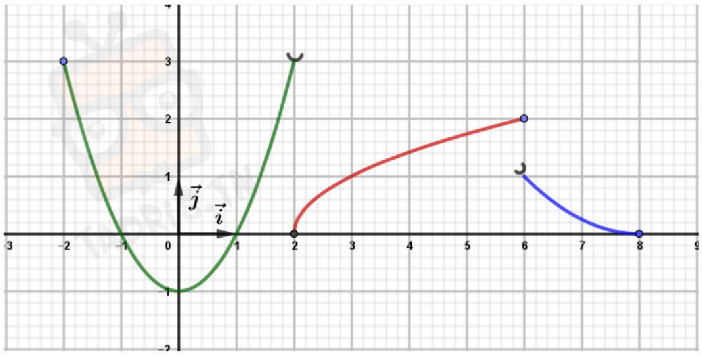
3) Vérifier que g est continue sur $]0,+\infty[$ puis déterminer $g(]0,+\infty[)$

4) **a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$

b) Vérifier que $2 < \alpha < 3$

Exercice 5

En utilisant le graphique :



1) Déterminer : $\lim_{x\to2^-} f(x)$

$\lim_{x\to2^+} f(x)$; $\lim_{x\to6^+} f(x)$

$\lim_{x\to6^-} f(x)$;

2) f est-elle continue à gauche en 2 ?

à droite en 2 ? en 2 ?

3) f est-elle continue à gauche en 6 ?

à droite en 6 ? en 6 ?

4) Déterminer les intervalles ou f est continue

5) Déterminer $f([-2,2[)$; $f(]6,8])$

6) Résoudre dans $[-2,8]$: $f(x) = 0$ et $f(x) < 0$

Exercice 6

Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} \; si \; x \in [-1,0] \\ x^2 + 1 \;\; si \; x \in]0,1] \end{cases}$

1) Etudier la continuité de g sur $[-1,1]$

2) Déterminer $g([-1,1])$

Exercice 7

1) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} & si \; x \neq 0 \\ 0 & si \; x = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f sur IR

2) Soit f la fonction définie sur IR^* par $f(x) = x.E(x - \frac{1}{x})$

Montrer que f admet une limite en 0 que l'on déterminera

Exercice 8

1) Soit f une fonction définie sur $[0,+\infty[$ $par\ f(x) = x^3 + 2\sqrt{x} - 1$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possede une unique solution α. Vérifier que $\alpha \in]0,1[$

b) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0,+\infty[$

2) Soit $g(x) = x^5 - 2x^3 + x - 4$. Montrer que la courbe (C_g) coupe l'axe des abscisses en au moins un point M

Exercice 9

1) Soit $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$

a) Déterminer D_f **b)** Montrer que f est prolongeable par continuité en -1

2) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ \ x < -1 \\ x+3 & si -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} & si\ \ x > 2 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en -1

b) Etudier la continuité de g en 2

c) Montrer que g est continue sur $[-2,-1]$

d) Montrer que l'équation $g(x) = -x$ admet une unique solution $\alpha \in]-2,-1[$

e) Montrer que α est une solution de l'équation $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$. En déduire la valeur exacte de α