***Epreuve :*** *Mathématique*

| *Devoir de **synthèse** n°1* |
|---|

| *Section : 3ème **sciences** expérimentales* | *Durée : 2 heures* |
|---|---|

**Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie**

## *Exercice n°1* — *3,25 points*

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to-3}\left(\frac{x^2-9}{x+3}\right)$ 2) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3-x}{3x^2-2x-1}\right)$ 3) $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2x\right)$ 5) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3}\right)$

## *Exercice n°2* — *5,5 points*

Soit $f$ la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ *par* $f(x)=\frac{2(x+1)}{x^3+x^2+x+1}$

1) a) On pose $g(x)=\frac{2}{1+x^2}$ . Montrer que pour tout réels $x\neq-1$ : $f(x)=g(x)$

b) Calculer : $\lim_{x\to-1} f(x)$. En déduire que la fonction $f$ est prolongeable par continuité en $-1$ et déterminer sa prolongement

2) Etudier la parité de la fonction $g$

3) a) Montrer que $g$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

b) En déduire que $g$ est strictement croissante sur $]-\infty,0]$

4) Calculer $g(0)$ puis déduire que $g$ est bornée sur $IR$

5) On pose $h(x)=g(x)-2x$

a) Montrer que $h$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]\frac{1}{2},1\right[$

c) Montrer que $\alpha^3+\alpha=1$

6) Dans la feuille annexe on a tracé $C_f$ : la courbe représentative de la fonction $f$ sur $[0,+\infty[$. Compléter brièvement la construction de $C_f$ sur $IR\setminus\{-1\}$et préciser la valeur exacte de $\alpha$ sur la figure

## *Exercice n°3* — *5 points*

I. Soit $f$ la fonction définie par le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

1) Déterminer $D_f$ : le domaine de définition de la fonction $f$

2) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $D_f$

3) Résoudre l'équation $f(x) < 0$

II. soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

1) Déterminer $D_g$ : le domaine de définition de la fonction $g$

2) Montrer que $g$ est une fonction impaire

3) Vérifier que, pour tout réels $x \in IR^*, g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}$

4) a) Montrer que, pour tous réels $a$ $et$ $b$ appartenant à$]0,+\infty[$,

$$g(a) - g(b) = \frac{b^2 - a^2}{ab\left(b\sqrt{a^2+1} + a\sqrt{b^2+1}\right)} +$$

b) En déduire les variations de $g$ sur $]0,+\infty[$

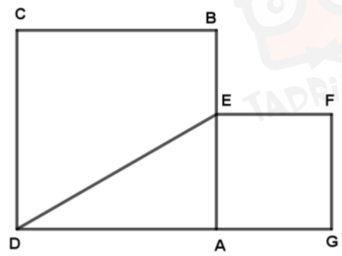
5) on se propose dans cette question de démontrer que $g$ n'admet ni un maximum ni un minimum sur $]0,+\infty[$

a) Supposons que $M$ est le maximum de $g$ sur $]0,+\infty[$ atteint en un réel $a$ et $m$ son minimum sur $]0,+\infty[$ atteint en un réel $b$.

Comparer $g(a) et\ g(\frac{a}{2})$ d'une part et $g(b) et\ g(2b)$ d'autre part

b) En déduire que $g$ n'admet ni un maximum ni un minimum sur $]0,+\infty[$

Dans la figure ci-contre $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés tel que $AB = \sqrt{3}$ et $E$ le point du segment $[AB]$ qui vérifie $\widehat{ADE} = \frac{\pi}{6}$




1) a) Montrer que $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} = 3$

b) En déduire que $DE = 2$ puis $AE = 1$

2) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG}$

b) En déduire que les droites $(DE)$ et $(BG)$ sont perpendiculaires

3) a) Montrer que $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB} = 3 + \sqrt{3}$

b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4) Soit $I = A * C$

a) Montrer que pour tout point $M$ du plan on a : $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + 3$

b) Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tel que $MA^2 + MC^2 = 7$

5) La droite $(DE)$ coupe $(BG)$ en $H$. Soit $J = B * G$

a) En exprimant $\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GB}$ de deux manières différentes, montrer que $GH = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) En déduire que $JH = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Feuille annexe

Nom : ……………………………………….... Prénom :…………………………………. ………