Prof : Ben Rached .F	Epreuve : Mathématiques	
	Section : Sciences expérimentales	
	Classes:4ème année de l'enseignement secondaires	
	Durée :2h	Devoir de Contrôle N°1

Exercice N°1 8 points

I)Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si\ \ x<0\\ x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & si\ x>0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Interpréter ce résultat graphiquement

2)Pour tout $x>0$ on considère les fonctions U et V définies par $V(x)=\frac{1}{x}$ et $U(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x}$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} UoV(x)$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) a)Calculer $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

b)i) Montrer que pour tout $x>0$ on a :$-x^2\le f(x)\le x^2$

ii) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

c) En déduire que f est continue en 0

II) On a représenté ci-contre , dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe représentative (C_g) d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

⁎ La courbe(C_g) admet au voisinage de -∞ une B.I de direction asymptotique celle de $(o,\vec{\imath})$.

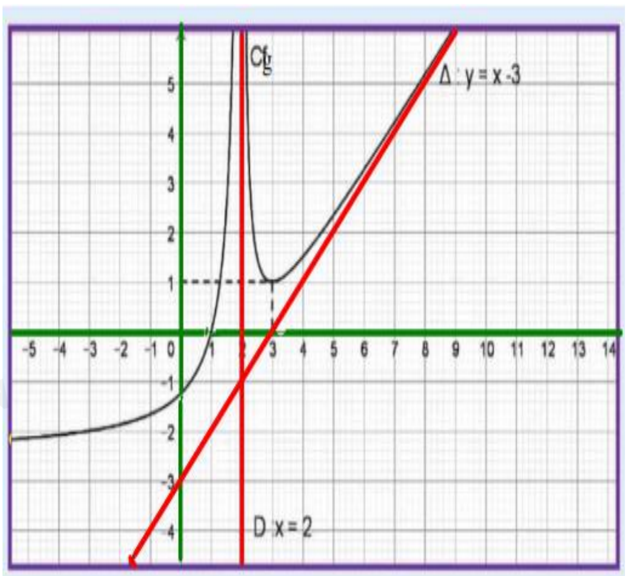
⁎ La courbe(C_g) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique Δ d'équation $y=x-3$

⁎ La courbe(C_g) admet une asymptote verticale d'équation $x=2$

1)Déterminer en justifiant la réponse

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x)$



2)Déterminer en justifiant la réponse g ( ] -∞, 2 [ )

et $g(]2{,}3])$

3)Calculer $fog(1)$ et $fog(3)$

4) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to2^+} fog(x)\ \ et\ \ \lim\limits_{x\to-\infty} fog(x)$

Exercice N°2 6points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$\boldsymbol{a = \sqrt{3} + i,\quad b = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)\quad et\ c = -1 + i\sqrt{3}}$$

1) a) Mettre a et c sous forme trigonométrique

b) Construire les points A et C

c) Montrer que le triangle OAC est isocèle et rectangle en O

2) a) Déterminer Aff($\overrightarrow{AB}$) et Aff($\overrightarrow{OC}$)

b) Montrer que le quadrilatère OABC est un carré puis construire le point B

3) a) Vérifier que $\boldsymbol{(1+i)a = b}$

b) Mettre $\boldsymbol{b}$ sous forme exponentielle

c) En déduire $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$

Exercice N°3 6points

1)On considère l'équation (E_θ) : $z^2 - (2i + e^{i\theta})z - 1 + ie^{i\theta} = 0$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E_θ) est égal à $(e^{i\theta})^2$

b) Résoudre l'équation (E_θ).

2)) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $Z_A = e^{i\theta}$, $Z_B = i + e^{i\theta}$ et $Z_C = i$

a) Montrer que le quadrilatère OABC est un losange

b) i) Montrer que $Z_B \times e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

ii) En déduire une forme exponentielle de Z_B

c) Montrer que $OB \times AC = 2\cos(\theta)$

d) Déterminer la valeur de θ pour que l'aire du losange OABC soit égale à $\frac{1}{2}$