Les nombres complexes

I L'ensemble des nombre complexes

1. L'ensemble $\mathbb{C}$

$x^2+1=0 \Longleftrightarrow x^2=-1$ impossible

Définition

Il existe un ensemble appelé **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, contenant l'ensemble $\mathbb{R}$ a les caractéristiques suivantes :

1. Il contient un élément i (non réel) vérifiant : $i^2=-1$.
2. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $z=a+ib$, où a et b sont des réels.

$$\mathbb{C}=\{a+ib\ /(a;b)\in\mathbb{R}^2\}$$

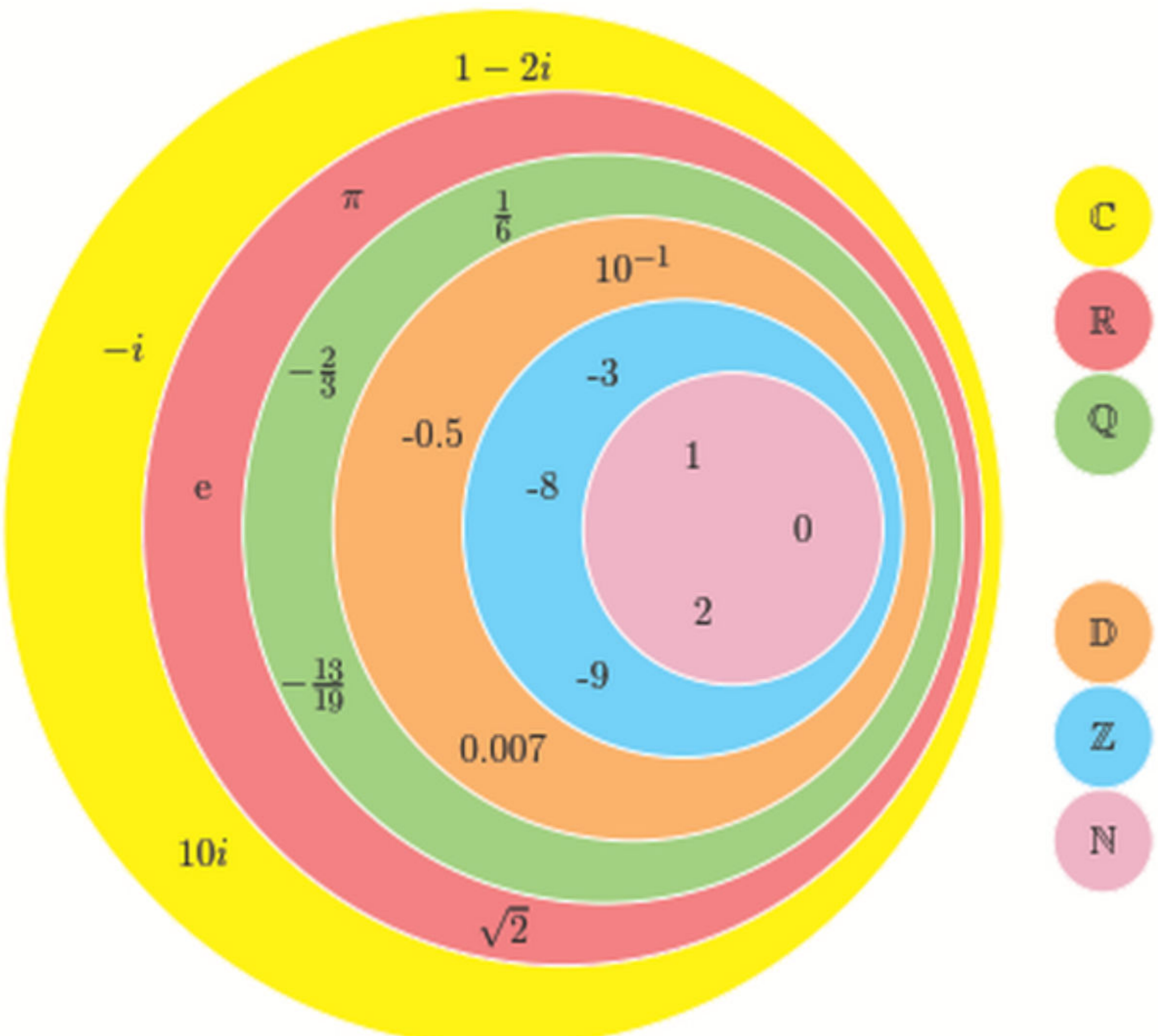
Exple

$z=\underbrace{3}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{2}_{\in\mathbb{R}}i$ | $z=\sqrt{2}+\frac{1}{2}i$

$z=-5-6i$ | $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi i$

$z=-3+0i=-3$

$z=0+5i=5i$ / $z=0+0i=0$



$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

Remarques :

- L'écriture $z = a + ib$ est appelée **la forme algébrique** de z.
- Le réel a est appelé **la partie réelle** de z, et on écrit : $Re(z) = a$.
- le réel b est appelé **la partie imaginaire**, et on écrit : $Im(z) = b$.
- Si $b = 0$, on a $z = a$, dans ce cas on dit que z est **un nombre réel** $(z \in \mathbb{R})$.
- Si $a = 0$, on dit que z est **un imaginaire pur** ($z \in i\mathbb{R}$: **L'ensemble des imaginaires purs**).

* $z = a + ib$ et $b = 0$
$\Rightarrow z = a \in \mathbb{R}$.
* Si $a = 0 \Rightarrow$
$z = ib$

2. Égalité de deux nombres complexes

Propriété

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombre complexes.

1. $z = z' \iff a = a'$ et $b = b'$.
2. $z = 0 \iff a = 0$ et $b = 0$.

3. Opérations sur les nombres complexes

Toutes les propriétés de l'addition, la multiplication, la soustraction, la division, les puissances relatives, identités remarquables... définies sur les réels se prolongent aux nombres complexes

(1) $\left.\begin{array}{l} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{array}\right\} \Rightarrow z + z' = a + ib + a' + ib' =$

$(a + a') + ib + ib' = \underbrace{(a + a')}_{Re(z+z')} + i\underbrace{(b + b')}_{Im(z+z')}$.

(2) $z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + \underset{-1}{i^2} bb'$

$= aa' + i(ab' + a'b) - bb'$

$= \underbrace{(aa' - bb')}_{Re(z \times z')} + i\underbrace{(ab' + a'b)}_{Im(z \times z')}$.

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha z = \alpha(a + ib)$

$= \underbrace{\alpha a}_{Re(\alpha z)} + i\underbrace{\alpha b}_{Im(\alpha z)}$.

(4) i

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$

$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$.

$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

TADRIS.TN

Propriété

Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ deux nombre complexes.

1. $z+z'=(a+a')+i(b+b')$ et $z-z'=(a-a')+i(b-b')$.
2. $z\times z'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.
3. $\alpha\times z=(\alpha a)+i(\alpha b)$, où α est un réel.
4. Si $z\neq 0$, alors : $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$.
5. Soit n et k deux entiers naturels, On a :

$$i^n=\begin{cases}1 & , n=4k\\ i & , n=4k+1\\ -1 & , n=4k+2\\ -i & , n=4k+3\end{cases}$$

$50=4\times 12+2$

$7=4\times 1+3$

$i^7=-i$

$i^{50}=-1.$

Applications :

1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1=1+3i-(2+4i)\quad ;\quad z_2=-\frac{1}{i}\quad ;\quad z_3=(1-2i)^3$$

2. Trouver les nombres réels a et b tels que : $a(1-i)+b(2+3i)=2$.
3. Calculer et simplifier le nombre $\left(\frac{1+i}{100}\right)^{100}$.
4. Soit x en réel, on pose $Z=1-x+2(1-x^2)i$. Déterminer le réel x dans chacun des cas suivants :
   a. $Z\in\mathbb{R}$.
   b. $Z\in i\mathbb{R}$.
   c. $Re(Z)=4$.
   d. $Im(Z)=2$.

Corrections

$$z_1=1+3i-(2+4i)\quad ;\quad z_2=-\frac{1}{i}\quad ;\quad z_3=(1-2i)^3$$

① $z_1=1+3i-(2+4i)=1+3i-2-4i=(1-2)+i(3-4)=-1-i$

$Re(z_1)=-1$ et $Im(z)=-1.$

* $z_2=\frac{-1\times i}{i\times i}=\frac{-i}{i^2}=\frac{-i}{-1}=\frac{i}{1}=i=0+1i$

$Re(z_2)=0$ et $Im(z_2)=1.$

* $z_3 = (1-2i)^3 =$

$1^3 - 3\times 1^2 \times (2i) + 3\times 1\,(2i)^2 - (2i)^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$1 - 6i + 12\underbrace{i^2}_{-1} - 8\underbrace{i^3}_{-i} = 1 - 6i - 12 + 8i$

$= (1-12) + i(-6+8)$

$= -11 + 2i$

$\Rightarrow Re(z_3) = -11$; $Im(z_3) = 2$.

2. Trouver les nombres réels a et b tels que : $a(1-i)+b(2+3i)=2$.

$a(1-i) + b(2+3i) = 2 \iff a - ai + 2b + 3bi = 2 \iff$

$(a+2b) + i(3b-a) = 2 + 0i \iff \begin{cases} a+2b = 2 & (1) \\ 3b - a = 0 & (2) \end{cases}$

$\iff 5b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{5}$

$a = 2 - 2b = 2 - 2\cdot\frac{2}{5}$

$= 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$

3. Calculer et simplifier le nombre $\left(\frac{1+i}{100}\right)^{100}$.

$(1+i)^2 = 1^2 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i$

$\left(\frac{1+i}{100}\right)^{100} = \frac{(1+i)^{100}}{100^{100}} = \frac{1}{100^{100}} \times \left((1+i)^2\right)^{50} =$

$\frac{1}{100^{100}} \times (2i)^{50} = \frac{1}{100^{100}} \times 2^{50} \times i^{50} = \frac{1}{100^{100}} \times 2^{50} \times (-1) = -\frac{2^{50}}{100^{100}}$

4. Soit x en réel, on pose $Z = \underbrace{1-x}_{Re(z)} + \underbrace{2(1-x^2)}_{Im(z)}i$. Déterminer le réel x dans chacun des cas suivants :

a. $Z \in \mathbb{R}$.
b. $Z \in i\mathbb{R}$.
c. $Re(Z) = 4$.
d. $Im(Z) = 2$.

a) $z \in \mathbb{R} \iff (1-x) + 2(1-x^2)i \in \mathbb{R} \iff 2(1-x^2) = 0 \iff$
$1 - x^2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$.

b) $z \in i\mathbb{R} \iff Re(z) = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$.

c) $Re(z) = 4 \iff 1 - x = 4 \iff x = 1 - 4 \iff x = -3$

d) $Im(z) = 2 \iff 2(1-x^2) = 2 \iff 1 - x^2 = 1 \iff x^2 = 0$
$\iff x = 0$

Résultats

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\bar{z}$ son conjugué

4. Conjugué d'un complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, où a et b sont des réels.

On appelle **conjugué** du nombre z, le nombre $(a - ib)$ et l'on note $\overline{z}$.

$$\overline{z} = \overline{a + ib} = a - ib$$

si $z = 5 + 2i \Rightarrow \overline{z} = \overline{5 + 2i} = 5 - 2i$

si $z = \sqrt{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow \overline{z} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}i$

Propriété

Soit z et z' deux complexes, α un réel.

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
3. $\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$.
4. Si $z' \neq 0$, on a : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Applications :

1. Déterminer le conjugué de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = -\left(\sqrt{2} - i\right)\left((3 - i\right)^2 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{i(1 + 6i)}{(3 - i)^2}$$

2. Écrire sous forme algébrique, le conjugué de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = (2 + i)(1 - i) \quad \text{et} \quad \left(\frac{3 - i}{1 + i}\right)$$

3. On pose $Z_1 = \frac{2 + i}{1 - i}$ et $Z_2 = \frac{2 - i}{1 + i}$. Montrer que :

$$(Z_1 + Z_2) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (Z_1 - Z_2) \in i\mathbb{R}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes :

   a. $(1 - i)\overline{z} = 3 + i$.

   b. $\frac{\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1} = i$.

Remarque : $z = a+ib \rightarrow \overline{z} = a-ib.$

① $z=\overline{z} \Leftrightarrow \cancel{a}+ib = \cancel{a}-ib \Leftrightarrow ib = -ib.$
$\Leftrightarrow ib+ib=0 \Leftrightarrow 2ib=0 \Leftrightarrow b=0$

$$z=\overline{z} \Leftrightarrow Im(z)=0.$$

② $z=-\overline{z} \Leftrightarrow Re(z)=0$

1. Déterminer le conjugué de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = -(\sqrt{2}-i)((3-i)^2 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{i(1+6i)}{(3-i)^2}$$

$+ \overline{z_1} = \overline{-(\sqrt{2}-i).(3-i)^2} = \overline{-(\sqrt{2}-i)} \times \overline{(3-i)^2} =$ $\alpha.$

$\overline{-1} \times \overline{(\sqrt{2}-i)} \times \overline{3-i}^2 = -1 \times (\sqrt{2}+i) \times (3+i)^2 =$
$-(\sqrt{2}+i)(3+i)^2.$

$+ \overline{z_2} = \overline{\frac{i(1+6i)}{(3-i)^2}} = \frac{\overline{i}\,\overline{(1+6i)}}{\overline{3-i}^2} = \frac{-i(1-6i)}{(3+i)^2}$

2. Écrire sous forme algébrique, le conjugué de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = (2+i)(1-i) \quad \text{et} \quad \left(\frac{3-i}{1+i}\right)$$

$+ \overline{z_2} = \overline{(2+i)(1-i)} = \overline{(2+i)} \times \overline{(1-i)} = (2-i)(1+i) =$

$2+2i-i-i^2 = 2+i+1 = 3+i$

$+ \overline{z_3} = \overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+i-1}{1^2-i^2} =$

$\frac{2+4i}{1+1} = \frac{2+4i}{2} = \frac{2}{2}+\frac{4i}{2} = 1+2i$

TADRIS.TN

3. On pose $Z_1 = \dfrac{2+i}{1-i}$ et $Z_2 = \dfrac{2-i}{1+i}$. Montrer que :

$$(Z_1 + Z_2) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (Z_1 - Z_2) \in i\mathbb{R}$$

$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

$\overline{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$

$* \ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{\left(\frac{2+i}{1-i}\right)} + \overline{\left(\frac{2-i}{1+i}\right)} =$

$\frac{2-i}{1+i} + \frac{2+i}{1-i} = z_2 + z_1 = z_1 + z_2 \implies$

$z_1 + z_2$ est réel $(\in \mathbb{R})$.

$(\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 0)$.

$* \ \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{\left(\frac{2+i}{1-i}\right)} - \overline{\left(\frac{2-i}{1+i}\right)} =$

$\frac{2-i}{1+i} - \frac{2+i}{1-i} = z_2 - z_1 = -(z_1 - z_2)$

$\implies z_1 - z_2 \in i\mathbb{R} \quad (\operatorname{Re}(z_1 - z_2) = 0)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes :

a. $(1-i)\overline{z} = 3+i$.

b. $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = i$.

$(1-i)\overline{z} = 3+i \iff \overline{z} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$\overline{z} = \frac{3+3i+i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{3+4i-1}{2} = \frac{2+4i}{2} =$

$1+2i \implies z =$

$z = \overline{\overline{z}} = \overline{1+2i} = 1-2i$.