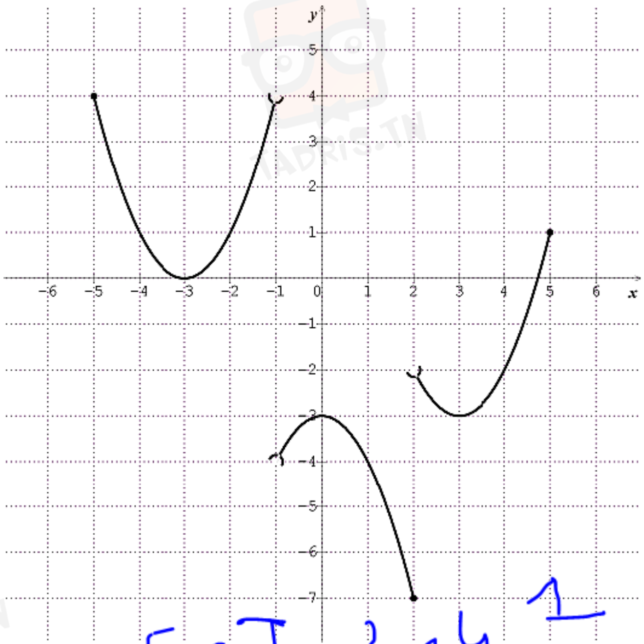
Exercice 1 (toutes les questions sont indépendantes) *(8 pts)*

Ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f définie sur $[-5,5]\setminus\{-1\}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



1) Répondre *par vrai* ou faux ***en justifiant*** :
a) La fonction $|f|$ est continue sur $[-5\ ,2]$
b) La fonction f est prolongeable par continuité en (-1)
c) $\frac{1}{f}$ est décroissante sur $[-5\ ,-3\,[$
2) Résoudre graphiquement :
   a) $f(x) = 1$; b) $f(x) = -2$
   c) $(f(x)-1)(f(x)+2) \geq 0$; d) $\frac{f(x)-1}{x} \leq 0$
   e) $E(f(x)) = -4$; f) $\sqrt{f(x)+3} \geq 2$
3) Montrer qu'il existe $\propto$ appartenant à $]-3,-2[$ tel que

$$(2\alpha+6)\,f(\propto) = 1$$

4) Calculer $\lim_{x\to -2} \frac{f^3(x)+6\,f(x)-7}{\sqrt{f(x)}-1}$

5) Soit g la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} f(x)+m & si\ \ x>1 \\ \frac{x^2\sqrt{2-x}-1}{x-1} & si\ x<1 \end{cases}$

Déterminer m pour que g soit prolongeable par continuité en 1.

$[-5,1]\setminus\{-1\}$ 1

$2-x\geq 0$ $[-5,2]\setminus\{-1\}$

Exercice 2 *(6 pts)*

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC isocèle en A, tel que : $AB=5$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv -\frac{2023}{4}\pi\,[2\pi]$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit au triangle ABC . Et ($\mathscr{C}'$) le cercle de centre A passant par B .

1) a) Faire une figure.
   b) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA})$.
2) Soit M un point variable dans le plan tel que $\left(\widehat{-2\overrightarrow{MC},-\overrightarrow{MA}}\right) \equiv -\frac{5\pi}{8}[2\pi]$
   a) Vérifier que $M \in (\mathscr{C})$
   b) Placer un point M en justifiant.
3) La droite (CM) recoupe ($\mathscr{C}'$) en D et la droite (BD) recoupe ($\mathscr{C}$) en N .
   a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}\right)[2\pi]$. Déduire que le triangle BDM est isocèle.
   b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DB}\ ,\overrightarrow{DM})$.
   c) Déduire que les droites (AD) et (MN) sont perpendiculaires.
4) La droite passant par C et perpendiculaire à (AM) coupe (BM) en I .
   Montrer que lorsque M varie, le point I se déplace sur le cercle ($\mathscr{C}'$).

Exercice 3 (6 pts)

Soit $ABCD$ un rectangle de centre I tel que $AD = x$ et $AB = 10 - x$ où x est un réel tel que $0 < x < 10$ et soit E et F les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AB]$.

1) a) Exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FA}$ *et* $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de x.

b) Montrer que $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FD} = 10x - 50$.

c) Déduire que $ABCD$ est un carré si et seulement si $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{FD}$.

2) **Dans cette question on prend $x = 5$.**

On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A\,,1)$ *et* $(I,2)$. La droite (AE) coupe les droites (FD) et (BD) respectivement en K et H.

a) Déterminer les ensembles $\mathcal{E} = \{M \in P / \, 2\,\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DG}.\overrightarrow{GK}\,\}$ et $\mathcal{E}' = \{M \in P \,/\, \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MH} = 0\}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{HD}$.

3) **Dans cette question on prend $x = 6$.**

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre B et de rayon 4 et par O le barycentre des points pondérés $(B,5)$ et $(C,4)$.

a) Montrer que $(\Delta) = \{M \in P \,/\, \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = 16\,\}$ est la perpendiculaire à (BC) passant par O .

b) La droite (Δ) coupe $\mathcal{C}$ en P et Q , calculer $\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC}$ *et* $\overrightarrow{QB}.\overrightarrow{QC}$.

c) Déduire que les droites (CP) et (CQ) sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$.

Correction

Mhamdi-Fethi Mathématiques $3^{ème}$Maths

Contrôle 1 Durée : 2 heures

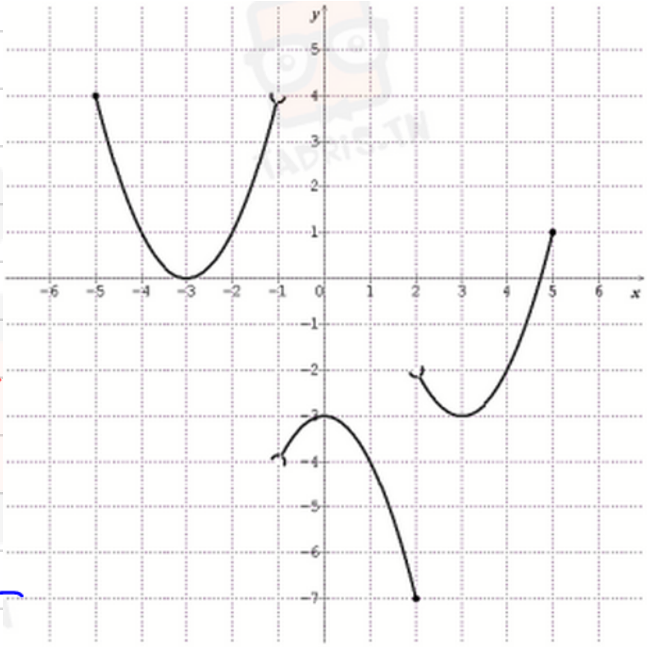
Exercice 1 (toutes les questions sont indépendantes)

1) Répondre *par vrai* ou faux ***en justifiant*** :

a) La fonction $|f|$ est continue sur $[-5\ ,2]$ Faux

$x \mapsto |f(x)|$ n'est pas définie en -1

$\Rightarrow$ elle n'est pas $\mathcal{C}$ en -1.



b) La fonction f est prolongeable par continuité en (-1) Faux.

* f n'est pas définie en -1

* $\lim_{-1^-} f(x) = 4$

$\lim_{-1^+} f(x) = -4$ $\Rightarrow f$ n'admet de limite en -1

$\Rightarrow f$ n'est pas prolongeable par continuité en -1.

c) $\frac{1}{f}$ est décroissante sur $[-5\ ,-3\ [$ Faux

Soit $a, b \in [-5,-3]$

$a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ (car f est $\searrow$ sur $[-5,-3]$)

$\Rightarrow \frac{1}{f(a)} \leq \frac{1}{f(b)}$

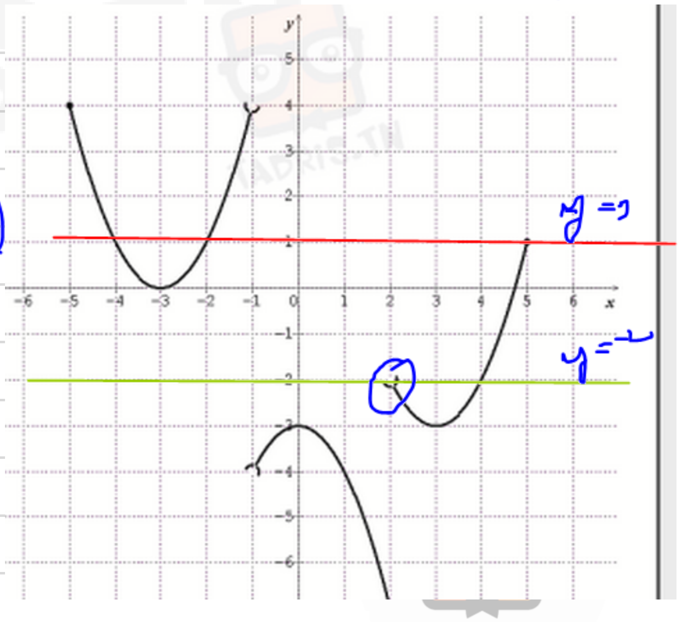
$\Rightarrow \frac{1}{f}$ est $\nearrow$ sur $[-5,-3]$

2) Résoudre graphiquement :

a) $f(x) = 1$

$S_{\mathbb{R}} = \{-4, -2, 5\}$.

b) $f(x) = -2$ $S_{\mathbb{R}} = \{4\}$



c) $(f(x)-1)(f(x)+2) \geq 0$; $\Leftrightarrow$

$f(x) \geq 1$ et $f(x) \geq -2$

ou $\Leftrightarrow$

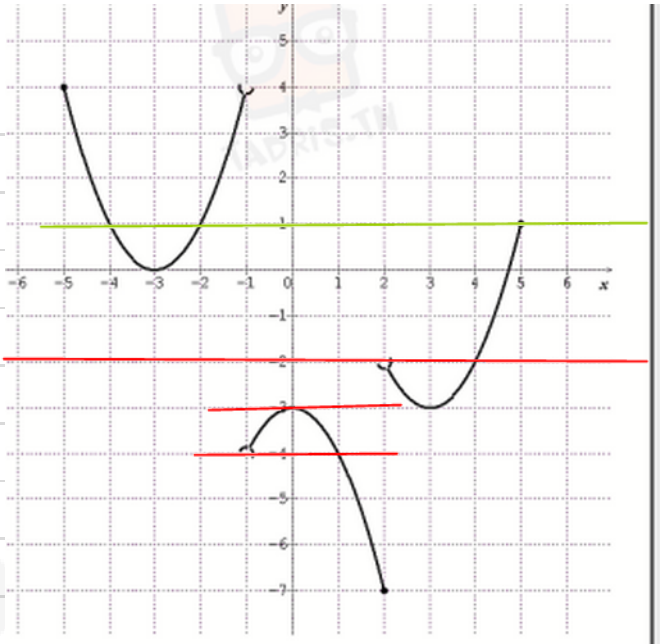
$f(x) \leq 1$ et $f(x) \leq -2$

$x \in [-5,-4] \cup [-2,-1[\cup \{5\}$ et

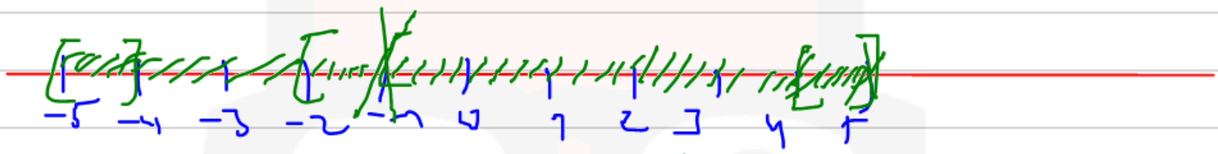
$x \in [-5,-1[\cup [4,5]$

ou

$x \in [-4,-2] \cup]-1,2] \cup]2,5]$ et $x \in]-1,2] \cup]2,4]$.



$\Leftrightarrow$



$S_{\mathbb{R}} = [-5,5] \setminus \{-1\} = D_f$.

e) $E(f(x)) = -4$ $\Leftrightarrow$ $-4 \leq f(x) < -3$

$\Leftrightarrow$ $x \in]-1,1] \setminus \{0\}$.

f) $\sqrt{f(x)+3} \geq 2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -3 \\ f(x)+3 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -3 \\ f(x) \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $f(x) \geq 1$.

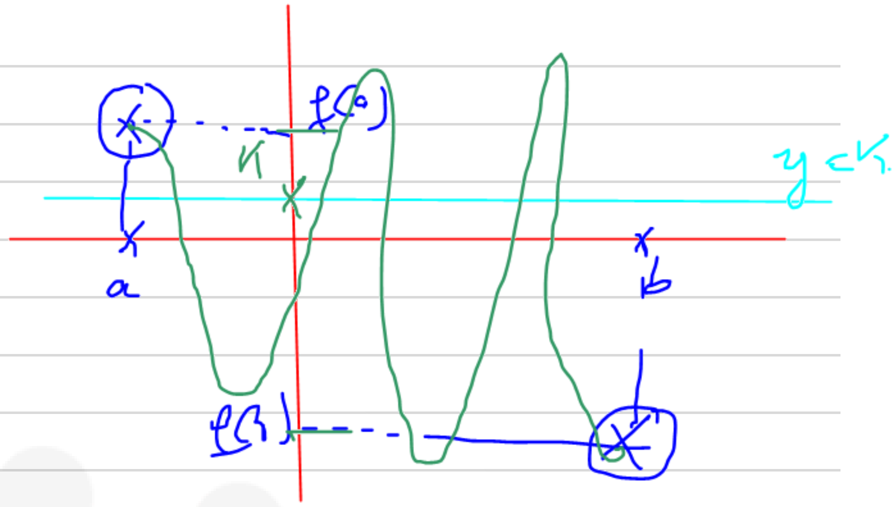
$\Leftrightarrow$ $x \in [-5,-4] \cup [-2,-1[\cup \{5\}$.

3) Montrer qu'il existe α appartenant à $]-3,-2[$ tel que

$$(2\alpha+6)\, f(\alpha) = 1$$

T.V.I

f continue sur $[a,b]$
k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ $\}$ $\Rightarrow$ $f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha \in [a,b]$



Soit $g(x) = \underbrace{(2x+6)}_{\mathcal{C} \text{ sur } [-3,-2] \text{ (polynome)}} \underbrace{f(x)}_{\mathcal{C} \text{ sur } [-3,-2] \text{ (graphiquement)}}$.

$\boxed{g(x) = 1}$??

①

$\Rightarrow$ g est $\mathcal{C}$ sur $[-3,-2]$ comme étant produit de 2 fonctions $\mathcal{C}$

② $g(-3) = (\underbrace{2\times -3 + 6}_{0})\, f(-3) = 0$

$g(-2) = (2\times -2 + 6)\, f(-2) = 2\times 1 = 2$

$\Rightarrow 1 \in [0,2]$.

$\Rightarrow$ d'après T.V.I : $g(x) = 1$ admet au moins une solution $\alpha \in]-3,-2[$.

i.e. $\exists\, \alpha \in]-3,-2[$ tq $g(\alpha) = 1$

$(2\alpha+6)\, f(\alpha) = 1$

4) Calculer $\lim_{x \to -2} \frac{f^3(x)+6f(x)-7}{\sqrt{f(x)}-1} = \frac{0}{0}$ F.I.

$f(-2) = 1$.

on pose $X = f(x)$.

$\lim_{X \to 1} \frac{X^3+6X-7}{\sqrt{X}-1} = ?$

$X^3+6X-7 = (X-1)(X^2+aX+b)$

$= X^3+aX^2+bX-X^2-aX-b$

$= X^3+(a-1)X^2+(b-a)X-b$

$\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ b-a=6 \\ -b=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=7 \end{array}$

$\lim_{X \to 1} \frac{X^3+6X-7}{\sqrt{X}-1} = \lim_{X \to 1} \frac{(X-1)(X^2+X+7)}{\sqrt{X}-1} \frac{\times(\sqrt{X}+1)}{\times(\sqrt{X}+1)}$

$\lim_{X \to 1} (X^2+X+7)(\sqrt{X}+1) = 18$

5) Soit g la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} f(x)+m & si\ x>1 \\ \frac{x^2\sqrt{2-x}-1}{x-1} & si\ x<1 \end{cases}$

Déterminer m pour que g soit prolongeable par continuité en 1.

* g n'est pas définie en 1

* $\lim_{1^-} g(x) = \lim_{1^-} \frac{x^2\sqrt{2-x}-1}{x-1}$

$\lim_{1^-} \frac{x^2\sqrt{2-x}-x^2}{x-1} + \frac{x^2-1}{x-1}$.

$$\lim_{1^-} \frac{x^2\sqrt{2-x} - x^2}{x-1} + \frac{x^2-1}{x-1} =$$

$$\lim_{1^-} \frac{x^4(2-x) - x^4}{(x-1)\left(x^2\sqrt{2-x} + x^2\right)} + x+1$$

$$\lim_{1^-} \frac{x^4 - x^5}{\underbrace{(x-1)}\left(x^2\sqrt{2-x} + x^2\right)} + x+1 .$$

$$\lim_{1^-} \frac{x^4(1-x)}{(x-1)\left(x^2\sqrt{2-x} + x^2\right)} + x+2$$

$$\lim_{1^-} \frac{-x^4}{x^2\sqrt{2-x} + x^2} + x+1 =$$

$$\frac{-1}{2} + 2 = \boxed{3/2}$$

* $\lim_{1^+} g(x) = \lim_{1^+} f(x) + m = f(1) + m$

$= -4 + m.$

g prolongeable par continuité en $1 \iff$

$-4 + m = \frac{3}{2} \iff m = \boxed{\frac{11}{2}}$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} f(x) + \frac{11}{2} & \text{si } x > 1 \\ 3/2 & \text{si } x = 1. \\ \frac{x^2\sqrt{2-x} - 1}{x-1} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Exercice 2 (6 pt.

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC isocèle en A, tel que : $AB = 5$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{2023}{4}\pi[2\pi]$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit au triangle ABC . Et ($\mathscr{C}'$) le cercle de centre A passant par B .

1) a) Faire une figure.

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{2024}{4}\pi + \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

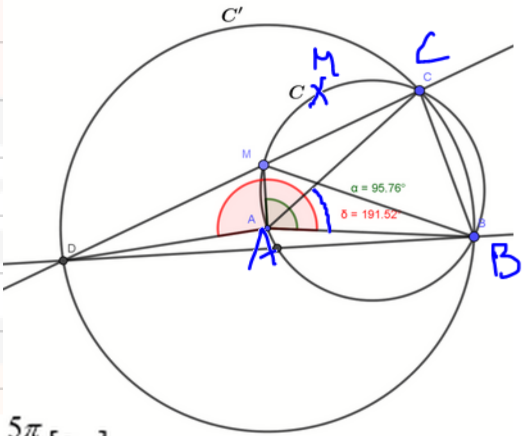
$\equiv -506\pi + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

pair

b) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi - \pi/4}{2}[2\pi]$.

$\equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$.



2) Soit M un point variable dans le plan tel que $(\widehat{-2\overrightarrow{MC},-\overrightarrow{MA}}) \equiv -\frac{5\pi}{8}[2\pi]$

a) Vérifier que $M \in$ ($\mathscr{C}$)

$(\widehat{-2\overrightarrow{MC},-\overrightarrow{MA}}) \equiv -\frac{5\pi}{8}[2\pi] \Leftrightarrow$

$(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}}) \equiv -\frac{5\pi}{8}[2\pi]$.

$(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}) \equiv \frac{3\pi}{8} + \pi [2\pi]$.

$(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}}) \equiv (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + \pi[2\pi]$

donc $M \in \overset{\frown}{CA}$ du cercle $\mathscr{C}$.

$(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}) \equiv \theta[2\pi] \Leftrightarrow (\alpha\overrightarrow{MC},\beta\overrightarrow{MA}) \equiv \theta[2\pi]$

$\alpha \times \beta$ de même signe.

$\frac{11\pi}{8} = \frac{16\pi}{8} - \frac{5\pi}{8}$

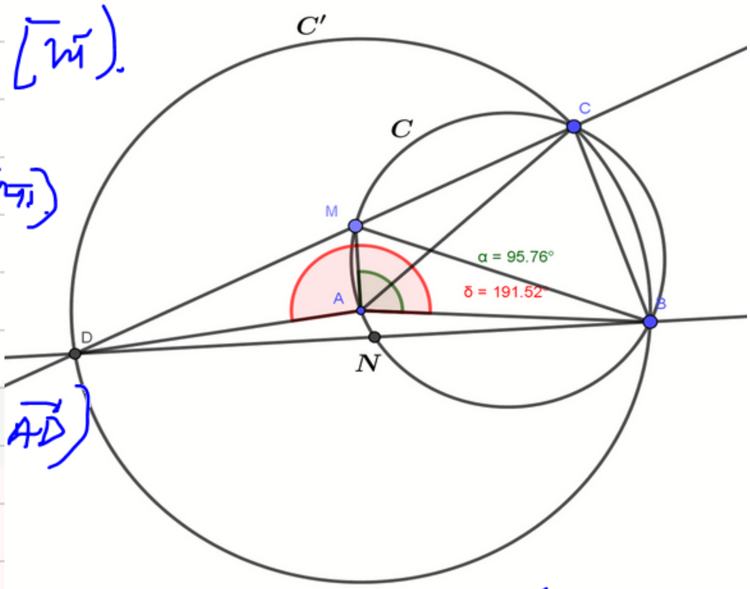
$= 2\pi - \frac{5\pi}{8}$

3) La droite (CM) recoupe $(\mathscr{C}')$ en D et la droite (BD) recoupe $(\mathscr{C})$ en N .

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}\right)[2\pi]$. Déduire que le triangle BDM est isocèle.

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) + \pi \; [2\pi]$$

$$\equiv 2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CM}\right) + \pi \; [2\pi]$$



$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right) + \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}\right)$$

$=$

✓