Lycée Pilote Monastir	**Suites réelles**	
4 ème Math	***2023-2024***	*Mr : Chortani Atef*

Exercice n°1 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :$U_0 = \frac{1}{2}$ $et\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*: U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) U_{n-1}$

1)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}: U_n > 0$.

2) Soit (V_n) définie sur $\mathbb{N}$par :$V_n = \sqrt{n+1}\ U_n$

a— Exprimer $V_{n+1}^2 - V_n^2$ en fonction e n et de U_n^2

b − Déduire que (V_n) est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}: U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

3) Soit (W_n) la définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \sqrt{n}\ U_n$

a)Montrer que (W_n) est croissante

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*: U_n \geq \dfrac{1}{4\sqrt{n}}$.

4) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5) a)Calculer U_n en fonction de n

b)En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$

Exercice n°2 :

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par

$f_n(x) = x + n\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, et C_n sa courbe représentative

1) Dans cette question , on prend $n = 1$

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin(f_1(x))}{\sqrt{x}} & si\ x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

a- Montrer que g est continue à droite en 0

b- Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2) Montrer que pour entier naturel non nul n, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

3) a- Montrer que pour entier naturel non nul , l'équation $f_n\ (x) = 1$ admet dans l'intervalle $]0,1[$

une unique solution $\propto_n$.

b- Etudier la position de $C_{n+1}\ etC_n$

c-En déduire que la suite $(\propto_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}^*$

d- En déduire que la suite $(\propto_n)$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°3 :

Soit $f\ (x) = \dfrac{x^2+3}{2(x+1)}$ $\ ,x \in]-1,+\infty[$

1) Etudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in]-1,+\infty[$

2) Dresser le tableau de variation de $f\ sur\ ]-1,+\infty[$

3) Soit la suite U définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n), \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $on\ a\ 1 \leq U_n \leq \dfrac{3}{2}$

b) Montrer que (U_n) est décroissante, en déduire que U_n est convergente et déterminer sa limite.

4)a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\ et\ n \geq 2$,

L'équation $f(x) = n$ admet dans $]-1,1[$ une unique solution α_n .

b) Montrer que pour tout $n \geq 2, on\ a : -1 < \alpha_n < -1 + \dfrac{2}{n}$

en déduire que α_n est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°4 :

Pour tout entier naturel non nul , on considère la fonction f_n définie

sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f_n\ (x) = x - \mathrm{n}\tan(x)$

1)a)Montrer que pour tout n ≥ 1, la fonction f_n réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

b) En déduire que l'équation $f_n\ (x) = -\,n$,admet dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution que l'on notera α_n .

c)Vérifier que pour tout n ≥ 1, $\alpha_n \in \left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $\tan(\alpha_n) = 1 + \dfrac{\alpha_n}{\mathrm{n}}$

2)a)Montrer que pour entier n ≥ 1, et tout x $\in \left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $-1 + f_n\ (x) > f_{n+1}(x)$

b) En déduire que la suite α_n est strictement décroissante et qu'elle converge vers un réel que l'on précisera.

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) U_{n-1}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n > 0$.

- on a $U_0 = \frac{1}{2} > 0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose que $U_n > 0$ mq $U_{n+1} > 0$
- $U_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) U_n > 0$

- En effet $U_n > 0$
- $n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2(n+1)} > 0$

2) Soit (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \sqrt{n+1}\ U_n$ $\quad$: $U_0 = \frac{1}{2}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) U_{n-1}$

a− Exprimer $V_{n+1}^2 - V_n^2$ en fonction e n et de U_n^2

a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1}^2 = \left[\sqrt{n+2}\ U_{n+1}\right]^2 = (n+2)\, U_{n+1}^2$$

$$= (n+2)\left[\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) U_n\right]^2 = (n+2)\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)^2 U_n^2$$

$$V_n^2 = (n+1)\, U_n^2$$

$$V_{n+1}^2 - V_n^2 = \left[(n+2)\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)^2 - (n+1)\right] U_n^2$$

$$= \left[(n+2)\left[1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2}\right] - (n+1)\right] U_n^2$$

$$= \left[n+2 - \frac{n+2}{n+1} + \frac{n+2}{4(n+1)^2} - (n+1)\right] U_n^2$$

$$= \left[1 - \frac{n+2}{n+1} + \frac{n+2}{4(n+1)^2}\right] U_n^2$$

$$= \left[\frac{-1 \times 4(n+1)}{4(n+1)(n+1)} + \frac{n+2}{4(n+1)^2}\right] U_n^2 = \frac{-3n-2}{4(n+1)^2}\, U_n^2$$

TADRIS.TN

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*: U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) U_{n-1}$

1)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}: U_n > 0$.

2) Soit (V_n) définie sur $\mathbb{N}$par : $V_n = \sqrt{n+1}\ U_n$

$V_0 = \sqrt{0+1}\ U_0 =$

a– Exprimer $V_{n+1}^2 - V_n^2$ en fonction e n et de U_n^2

b – Déduire que (V_n) est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}: U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

b) soit $n \in \mathbb{N}$

$V_{n+1}^2 - V_n^2 = \dfrac{-3n-2}{4(n+1)^2} U_n^2 < 0 \Rightarrow V_{n+1}^2 < V_n^2$

$\Rightarrow V_{n+1} < V_n$ [Car $V_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$] $\Rightarrow (V_n) \searrow$

$V_0 \geq V_1 \geq V_2 \geq \dots V_n$

• $(V_n) \searrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $V_n \leq V_0$

$\Rightarrow \sqrt{n+1}\ U_n \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*: U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) U_{n-1}$

3) Soit (W_n) la définie sur $\mathbb{N}$ *par* : $W_n = \sqrt{n}\ U_n$

a)Montrer que (W_n) est croissante

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*: U_n \geq \dfrac{1}{4\sqrt{n}}$.

3) soit $n \in \mathbb{N}$

$W_{n+1}^2 = \left[\sqrt{n+1}\ U_{n+1}\right]^2 = (n+1)\, U_{n+1}^2 = (n+1)\left(1 - \dfrac{1}{2(n+1)}\right)^2 U_n^2$

$= (n+1)\left[1 - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{4(n+1)^2}\right] U_n^2$

$W_n^2 = n\, U_n^2$

$W_{n+1}^2 - W_n^2 = \left[(n+1)\left(1 - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{4(n+1)^2}\right) - n\right] U_n^2$

$= \left[n+1 - 1 + \dfrac{n+1}{4(n+1)^2} - n\right] U_n^2$

$= \dfrac{1}{4(n+1)} U_n^2 \geq 0 \Rightarrow W_{n+1}^2 > W_n^2 \Rightarrow W_{n+1} > W_n$ $\left(W_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow (W_n) \nearrow$

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^* : U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) U_{n-1}$

3) Soit (W_n) la définie sur $\mathbb{N}$ *par* : $W_n = \sqrt{n}\; U_n$

a) Montrer que (W_n) est croissante

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : U_n \geq \dfrac{1}{4\sqrt{n}}$.

$U_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) U_0 = \frac{1}{4}$

b) $(W_n) \nearrow$ $\left(W_1 \leq W_2 \dots \leq W_n\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $W_1 \leq W_n \Rightarrow \sqrt{1}\, U_1 \leq \sqrt{n}\, U_n$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \sqrt{n}\, U_n \Rightarrow U_n \geq \dfrac{1}{4\sqrt{n}}$

4) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

$n \in \mathbb{N}^* : U_n \geq \dfrac{1}{4\sqrt{n}}$.

$n \in \mathbb{N} : U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{4\sqrt{n}} \leq U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{4\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} = 0$

$\Rightarrow (U_n)$ converge vers 0

4) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5) a) Calculer U_n en fonction de n

$: U_0 = \frac{1}{2}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^* : U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) U_{n-1}$

$U_n = \dfrac{2n-1}{2n}\, U_{n-1}$

$= \boxed{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2n-1}{n}\right] U_{n-1}}$

- $\cancel{U_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right) U_0$
- $\cancel{U_2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\, \cancel{U_1}$
- $\cancel{U_3} = \frac{1}{2}\; \frac{5}{3}\, \cancel{U_2}$
- $\cancel{U_4} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{4}\, \cancel{U_3}$
- $U_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2n-1}{n}\right] \cancel{U_{n-1}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \neq 0$

$\xrightarrow{\text{Produit}}$ $U_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \left[\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 2n-1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}\right]$

$1\times2\times3=3!$

$$U_n=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1\times3\times5\times7\times\dots\times 2n-1}{1\times2\times3\times\dots\times n}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}\,n!}\;\frac{1\times3\times5\times7\times\dots\times(2n-1)\times2\times4\times6\times\dots\times2n}{2\times4\times6\times\dots\times2n}$$

$(2n)!$

$$=\frac{1}{2^{n+1}\,n!}\;\frac{1\times2\times3\times\dots\times(2n)}{(2\times1)(2\times2)(2\times3)\times\dots\times(2n)}$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}(n!)}\;\frac{(2n)!}{2^n\,(\underbrace{1\times2\times\dots\times n})}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

5) a)Calculer U_n en fonction de n

b)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}=\lim_{n\to+\infty}U_n=0$$