correction

Exercice 1

Soit A et B deux points du plan tel que $AB = 3$

1) Déterminer et construire l'ensemble $C_1 = \left\{M \in P \text{ tel que} (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right\}$

Soit T un point du plan tq : $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ (voir figure)
et $\mathscr{C}$ le cercle tangent à (AT) en A et passant par A et B
(le centre O = med[AB] $\cap$ la $\perp$ à (AT))
d'après le cours
C_1 = l'arc $\overset{\frown}{BA}$ privé de A et B (voir construction dans la page 3)

2) On désigne par $C_2 = \left\{M \in P \text{ tel que } \frac{MA}{MB} = 2\right\}$

a) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -4)$

Montrer que $M \in C_2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 - 4GB^2)$

G est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,-4)$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

$* M \in \mathscr{C}_2 \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{MA}^2 = 4\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \Leftrightarrow$

$MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA} = 4MG^2 + 4GB^2 + 8\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow$

$0 = 3MG^2 + 4GB^2 - GA^2 + \underbrace{2\overrightarrow{MG}(\underbrace{4\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}}_{\vec{0}})}_{0} \Leftrightarrow$

$3MG^2 = GA^2 - 4GB^2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 - 4GB^2)$

b) En déduire que C_2 est un cercle de dont on précisera le centre et le rayon

$C_2 = \{M \in P / MG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 - 4GB^2)\}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} = \frac{-4}{1-4}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow AG = \frac{4}{\cancel{3}} \times \cancel{3} = 4$

$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{1-4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \Rightarrow BG = \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3} = 1$

donc $C_2 = \{M \in P \text{ tq } MG^2 = \frac{1}{3} \times (16 - 4)\}$
$= \{M \in P \text{ tq } MG^2 = 4\}$
$= \{M \in P \text{ tq } MG = 2\}$

$\Rightarrow C_2 = \mathscr{C}_{(G,2)}$.

3) Construire le point C du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ *et* $CA = 2CB$

$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow C \in \mathcal{C}_1$
$CA = 2CB \Leftrightarrow C \in \mathcal{C}_2$
$\Rightarrow C \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$

et comme $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en un seule point $\Rightarrow C = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$
d'où la construction de C.

Exercice 2

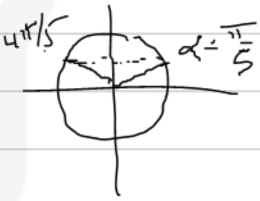
1) a) Montrer que pour tout reel x on a : $4\sin x\ \cos x \cos 2x = \sin 4x$

$4\sin x \cos x \cdot \cos 2x = 2 \times \underbrace{2\sin x \cos x}\cdot \cos 2x$
$= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x$
$= \sin 4x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
$\forall x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}$

on a : $4\sin x \cos x \cdot \cos 2x = \sin 4x$
en particulier $x = \pi/5$ on aura :
$4\ \cancel{\sin\frac{\pi}{5}} \cdot \cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5} = \cancel{\sin\frac{4\pi}{5}} \Rightarrow$
$4 \cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5} = 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5} \times \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.



2) a) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} \times \cos\frac{\pi}{5} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ✓

$\cos a + \cos b =$
$2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5}$ d'où le résultat.

3) calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

on a : $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{5} \times \cos\frac{2\pi}{5} = 1/4 \\ \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{5} \times \cos\frac{2\pi}{5} = 1/4 \\ \cos\frac{\pi}{5} + \left(-\cos\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{5} \times \left(-\cos\frac{2\pi}{5}\right) = -1/4 \\ \cos\frac{\pi}{5} + \left(-\cos\frac{2\pi}{5}\right) = 1/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{5}$ et $-\cos\frac{2\pi}{5}$ sont les solutions de l'équation :

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ avec } S = \frac{1}{2} \text{ et } P = -\frac{1}{4}.$$

$$X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + 1 = 5/4$$

$$X' = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } X'' = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

$$\Rightarrow -\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$