Devoir de controle n°1

Prof: M-Fethi

Exercice n°1

Soit ABCD un parallélogramme de centre O tels que AB = 2a, AD = a et $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$. ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

1°) a) Faire une figure claire et propre.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ en fonction de a.

2°) On désigne par I le milieu de [AB].

a) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI}$ en fonction de a.

b) Déduire que le triangle CDI est rectangle en I.

3°) Soit l'ensemble $\Delta = \{M, M \in P \text{ tels que } MA^2 - MC^2 = a^2\sqrt{7}\}$.

a) Montrer que $AC = a\sqrt{7}$.

b) Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer et construire l'ensemble Δ.

4°) Soit l'ensemble $\Gamma = \{M, M \in P \text{ tels que } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\|\}$.

a) Montrer que Γ est l'ensemble des points M du plan tels que $MC^2 = 4MI^2$.

b) On désigne par G le barycentre des points pondérées (I,4) et (C,-1).

Montrer que Γ est un cercle de centre G dont précisera le rayon.

Exercice n°2

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O et K le barycentre des points pondérés $(C,2)$ et $(A,-3)$

1) Soit $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 - MC^2 = -AC^2\}$. Montrer que Δ est la droite perpendiculaire à (AC) en A

2) Soit $\mathcal{C} = \{M \in P \text{ tel que } 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 3MA^2\}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{KA}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}KA^2$

b) En déduire que $K \in \mathcal{C}$

c) Montrer que pour tous points M du plan : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

d) En déduire l'ensemble $\mathcal{C}$

3) Montrer que Δ est tangente à $\mathcal{C}$

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

1) a) Montrer que pour tous réels distincts a et b de $]1,+\infty[$ on a

$f(b)-f(a)=(b-a)(1-\frac{1}{(a-1)(b-1)})$

b) Etudier alors le sens de variation de f sur $]1,2]$ et sur $[2,+\infty[$

c) En déduire que f admet sur $]1,+\infty[$ un minimum que l'on déterminera

2) le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $A(2,1)$, M un point de $(O,\vec{\imath})$ d'abscisse $x>1$. La droite (AM) coupe la droite $\Delta: y=x$ en un point N

a) montrer que $N(\frac{x}{x-1},\frac{x}{x-1})$

b) on désigne par $S(x)$ l'aire du triangle OMN. Déterminer la valeur de x pour laquelle $S(x)$ est minimale et préciser cette valeur

Exercice n°4

1) soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$. Montrer que f est borné sur $]0,+\infty[$

2) soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{x}{1+x^2}$. Montrer que g admet un maximum égal à $\frac{1}{2}$ sur IR

3) soit h la fonction définie sur IR par $h(x)=\frac{x^2+2x}{|x+1|+1}$

a) montrer que -1 est le minimum de h sur IR

b) l'équation $h(x)=-2$ admet-elle des solutions dans IR ? justifier

c) montrer que h est une fonction affine par intervalles

d) tracer C_h dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}$

Exercice n°5

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2 + \sqrt{5 - x}; & x \leq 4 \\ f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}; & x > 4 \end{cases}$

   (a) Étudier la continuité de f à gauche et à droite en 4 .

   (b) Est-ce que g est continue en 4 ?

2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}; & x > 0 \\ h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}; & x < 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

   Étudier la continuité de h en 0

3. Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^3; & x \leq 0 \\ f(x) = x + a; & x < 0 \end{cases}$

   Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 0 .