

Forme algébrique

$$z = a + ib$$

$$a = \operatorname{Re}(z) \text{ partie réelle de } z$$

$$b = \operatorname{Im}(z) \text{ partie imaginaire de } z$$

Conjugué

$$\bar{z} = a - ib$$

Propriétés du conjugué

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\bar{\bar{z}} = z \text{ équivaut à } z \in \mathbb{R}$$

$$\bar{\bar{z}} = -z \text{ équivaut à } z \in i\mathbb{R}$$

$$z\bar{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = a^2 + b^2$$

Module

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$$

Propriétés du module

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|$$

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Argument

On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle orienté (\vec{U}, \vec{OM}) avec $z = Z_M$

(O, \vec{U}, \vec{V}) repère orthonormé direct

$Z_M = a + ib$ affixe du point $M(a, b)$

$M(z)$ image de $z = a + ib$

Affixe d'un vecteur :

$$Z_{\vec{MN}} = Z_N - Z_M$$

$$Z_{\vec{U}} = Z_{\vec{V}} \text{ si et seulement si } \vec{U} = \vec{V}$$

$\frac{Z_{\vec{U}}}{Z_{\vec{V}}}$ réel ssi \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires

$\frac{Z_{\vec{U}}}{Z_{\vec{V}}}$ imaginaire pur ssi \vec{U} et \vec{V} sont orthogonaux

Pour tout nombre complexe non nul $z = a + ib$

$$\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$$

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Forme trigonométrique

$$(\vec{U}, \vec{OM}) \equiv \theta [2\pi]$$

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

avec $r = |z| > 0$



Propriétés d'argument

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$\arg(\alpha z) \equiv \arg(z) [2\pi] \text{ pour tout réel } \alpha > 0$$

$$\arg(\alpha z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi] \text{ pour tout réel } \alpha < 0$$

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

$$* (\widehat{U, OA}) \equiv \arg(Z_A) [2\pi]$$

$$* (\widehat{OA, OB}) \equiv \arg(Z_B) - \arg(Z_A) [2\pi] \equiv \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) [2\pi]$$

$$* (\widehat{U, AB}) \equiv \arg(Z_B - Z_A) [2\pi]$$

$$* (\widehat{AB, AC}) \equiv \arg(Z_C - Z_A) - \arg(Z_B - Z_A) [2\pi] \\ \equiv \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) [2\pi]$$

Notation :

Pour tout réel θ , on pose
 $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ et
on lit «*exponentielle $i\theta$* »

Formules d'Euler

Pour tout réel θ

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et pour tout
entier n

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n \\ = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Propriétés

✎ Pour tout réel θ :

$$* |e^{i\theta}| = 1 \text{ et } \arg(e^{i\theta}) \equiv \theta [2\pi]$$

$$* \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad * -e^{i\theta} = e^{i(\theta-\pi)}$$

$$* i e^{i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$$

✎ Pour tout réel θ et pour tout entier k

$$* e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$$

✎ Pour tous réels θ et θ' et pour tout entier n

$$* e^{i(\theta)} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$* \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$* \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$* e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$$

Forme exponentielle

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ

On écrit $z = r e^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$

Cette écriture s'appelle **forme exponentielle** de z

