| Lycée Pilote Monastir | **Suites réelles** | |
|---|---|---|
| 4 ème Math | *2023-2024* | *Mr : Chortani Atef* |

## Exercice n°1 :

On considère la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :$U_0 = \frac{1}{2}$ $et\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*: U_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) U_{n-1}$

1)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}: U_n > 0$.

2) Soit $(V_n)$ définie sur $\mathbb{N}$par :$V_n = \sqrt{n+1}\ U_n$

a− Exprimer $V_{n+1}^2 - V_n^2$ en fonction e n et de $U_n^2$

b − Déduire que $(V_n)$ est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}: U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$

3) Soit $(W_n)$ la définie sur $\mathbb{N}$ $par$ : $W_n = \sqrt{n}\ U_n$

a)Montrer que $(W_n)$ est croissante

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*: U_n \geq \dfrac{1}{4\sqrt{n}}$.

4) Montrer que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

5) a)Calculer $U_n$ en fonction de $n$

b)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$

## Exercice n°2 :

Pour tout entier naturel non nul $n$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $[0, +\infty[$ $par$

$f_n(x) = x + n\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, et $C_n$ sa courbe représentative

1) Dans cette question , on prend $n = 1$

On considère la fonction $g$ définie sur $[0, +\infty[$ $par$ $\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sin(f_1(x))}{\sqrt{x}} & si\ x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

a- Montrer que $g$ est continue à droite en 0

b- Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$.

2) Montrer que pour entier naturel non nul $n$, la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

3) a- Montrer que pour entier naturel non nul , l'équation $f_n\ (x) = 1$ admet dans l'intervalle $]0,1[$

une unique solution $\propto_n$.

b- Etudier la position de $C_{n+1}\ etC_n$

c-En déduire que la suite $(\propto_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}^*$

d- En déduire que la suite $(\propto_n)$ est convergente et calculer sa limite.

## Exercice n°3 :

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+3}{2(x+1)}$ , $x \in \left]-1,+\infty\right[$

1) Etudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \left]-1,+\infty\right[$

2) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\left]-1,+\infty\right[$

3) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , on a $1 \le U_n \le \dfrac{3}{2}$

b) Montrer que $(U_n)$ est décroissante, en déduire que $U_n$ est convergente et déterminer sa limite.

4)a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \ge 2$ ,

L'équation $f(x) = n$ admet dans $\left]-1,1\right[$ une unique solution $\alpha_n$ .

b) Montrer que pour tout $n \ge 2$, on a : $-1 < \alpha_n < -1 + \dfrac{2}{n}$

en déduire que $\alpha_n$ est convergente et déterminer sa limite.

## Exercice n°4 :

Pour tout entier naturel non nul , on considère la fonction $f_n$ définie

sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f_n(x) = x - n\tan(x)$

1)a)Montrer que pour tout $n \ge 1$, la fonction $f_n$ réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

b) En déduire que l'équation $f_n(x) = -n$ ,admet dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ une unique solution que l'on notera $\alpha_n$ .

c)Vérifier que pour tout $n \ge 1$, $\alpha_n \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et que $\tan(\alpha_n) = 1 + \dfrac{\alpha_n}{n}$

2)a)Montrer que pour entier $n \ge 1$, et tout $x \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ , $-1 + f_n(x) > f_{n+1}(x)$

b) En déduire que la suite $\alpha_n$ est strictement décroissante et qu'elle converge vers un réel que l'on précisera.