Correction

Exercice n°1

Soit ABCD un parallélogramme de centre O tels que $AB = 2a$, $AD = a$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$. ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

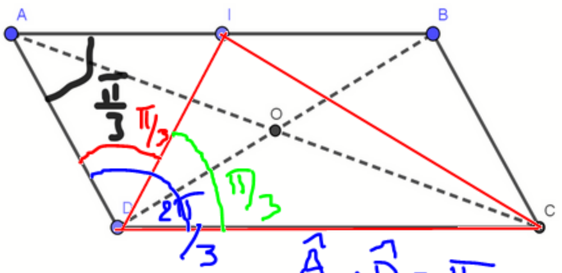
1°) a) Faire une figure claire et propre.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ en fonction de a.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\frac{\pi}{3}$

$= 2a \times a \times \frac{1}{2}$

$= \boxed{a^2}$



$\hat{A} + \hat{D} = \pi \Rightarrow$

$\hat{D} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

2°) On désigne par I le milieu de [AB].

a) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI}$ en fonction de a.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI} =$

$= \underbrace{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DI}} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DI}$

$= DC \times DI \times \cos\frac{\pi}{3} - \underbrace{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI}}$

$= 2a \times a \times \frac{1}{2} - a \times a \times \cos\frac{\pi}{3}$

$= a^2 - \frac{a^2}{2} = \boxed{a^2/2}$

b) Déduire que le triangle CDI est rectangle en I.

$\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$?

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI} = \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$

$\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{ID} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC})$

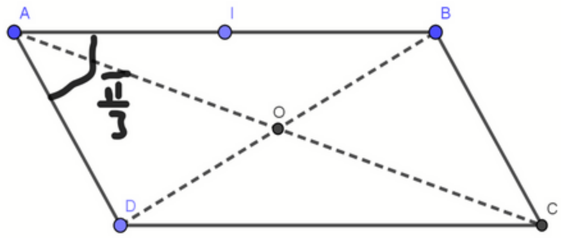
$= \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= ID \times IA \times \cos\frac{\pi}{3} - \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$ ✓ $\Rightarrow$ CDI est $\perp$ en I.

3°) Soit l'ensemble $\Delta = \{M,\ M \in P \text{ tels que } MA^2 - MC^2 = a^2\sqrt{7}\}$.

a) Montrer que $AC = a\sqrt{7}$.



$AC^2 = (\vec{AB} + \vec{AD})^2 =$

$AB^2 + AD^2 + 2\,\vec{AB}\cdot\vec{AD} =$

$4a^2 + a^2 + 2a^2 = 7a^2 \Rightarrow$

$AC = a\sqrt{7}$ ✓.

b) Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2 - MC^2 = 2\vec{OM}\cdot\vec{AC}$.

$MA^2 - MC^2 = (\vec{MO} + \vec{OA})^2 - (\vec{MO} + \vec{OC})^2$

$= \cancel{MO^2} + \cancel{OA^2} + 2\vec{MO}\cdot\vec{OA} - \cancel{MO^2} - \cancel{OC^2} - 2\vec{MO}\cdot\vec{OC}$

$= 2\vec{MO}\,(\underbrace{\vec{OA} - \vec{OC}}_{\vec{CA}}) = 2\vec{MO}\,.$

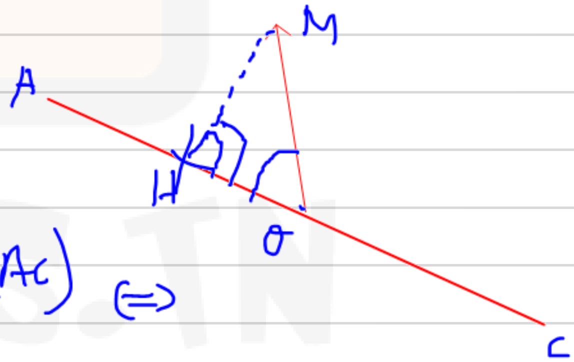
$\vec{CA}\ \ (\vec{OA} + \vec{CO} = \vec{CO} + \vec{OA} = \vec{CA})$

$= 2\vec{MO}\cdot\vec{CA}$

c) Déterminer et construire l'ensemble Δ.

$M \in \Delta \Leftrightarrow MA^2 - MC^2 = a^2\sqrt{7} \Leftrightarrow 2\vec{OM}\cdot\vec{CA} = a^2\sqrt{7} \Rightarrow$

$\vec{OM}\cdot\vec{CA} = \frac{a^2\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow$



$\vec{OH}\cdot\vec{CA} = \frac{a^2\sqrt{7}}{2}$ avec

H le projeté ⊥ de M sur (AC) $\Leftrightarrow$

$OH \times CA = \frac{a^2\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow$

$OH = \frac{a^2\sqrt{7}}{2} \times \frac{1}{CA} \Leftrightarrow OH = \frac{a^2\sqrt{7}}{2a\sqrt{7}} = \frac{1}{2}a.$

$\Rightarrow$ M décrit la ⊥ à (AC) passant par H.

4°) Soit l'ensemble $\Gamma = \{M, M \in P$ tels que $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\|\}$.

a) Montrer que Γ est l'ensemble des points M du plan tels que $MC^2 = 4MI^2$.

$I = A * B \Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

I bary de $(A,1)$ et $(B,1)$

$\Rightarrow \forall M \in P$ on a :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

G bary de (A,α) et $(B,\beta) \Rightarrow$

$\forall M \in P$ on a :

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB} = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{2}\overrightarrow{MG}$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$

$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$

$= 2MI = MC \Leftrightarrow 4MI^2 = MC^2$

b) On désigne par G le barycentre des points pondérées (I,4) 2 et (C,-1).
Montrer que Γ est un cercle de centre G dont précisera le rayon.

$M \in \Gamma \Leftrightarrow 4MI^2 = MC^2$

$\Leftrightarrow 4MI^2 - MC^2 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MC})}_{} \underbrace{(2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC})}_{} = 0$

$\Leftrightarrow$ $G \left| \begin{array}{l} (I,2) \\ (C,-1) \end{array} \right.$ $\qquad \underline{G'}$ $\qquad \underline{(I,2) \text{ et } (C,1)}$

$\overrightarrow{MG} \times 3\overrightarrow{MG'} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG'} = 0$

$\overrightarrow{MG} \perp \overrightarrow{MG'}$

donc $M \in \mathcal{C}_{[G,G']}$.

$\overrightarrow{IG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{IC}$.

$\overrightarrow{IG'} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{IG'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG'}$

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

1) a) Montrer que pour tous réels distincts a et b de $]1,+\infty[$ on a

$f(b)-f(a)=(b-a)(1-\frac{1}{(a-1)(b-1)})$

$$f(b)-f(a)=\frac{b^2}{b-1}-\frac{a^2}{a-1}=\frac{b^2(a-1)-a^2(b-1)}{(a-1)(b-1)}=$$

$$\frac{ab^2-b^2-a^2b+a^2}{(a-1)(b-1)}=\frac{ab^2-a^2b+a^2-b^2}{(a-1)(b-1)}=$$

$$=\frac{ab(b-a)+(a-b)(a+b)}{(a-1)(b-1)}=\frac{(b-a)(ab-a-b)}{(a-1)(b-1)}=$$

$$\frac{(b-a)(ab-a-b+1-1)}{(a-1)(b-1)}=$$

$$(b-a)\frac{(a-1)(b-1)-1}{(a-1)(b-1)}=(b-a)\left(1-\frac{1}{(a-1)(b-1)}\right)$$

b) Etudier alors le sens de variation de f sur $]1,2]$ et sur $[2,+\infty[$

$$f(b)-f(a)=\overset{+}{(b-a)}\left(1-\frac{1}{(a-1)(b-1)}\right)$$

Soit $1<a<b\leq 2$

$1<a\leq 2 \Rightarrow 0<a-1\leq 1$ et $0<b-1\leq 1$.

$0<(a-1)(b-1)\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{(a-1)(b-1)}\geq 1 \Rightarrow$

$1-\frac{1}{(a-1)(b-1)}\leq 0$ et comme $b-a>0$

$\Rightarrow f(b)-f(a)\leq 0$

$\Rightarrow f$ est $\searrow$ sur $]1,2[$.

de même : sur $[2,+\infty[\rightarrow f$ est $\nearrow$ sur $[2,+\infty[$

x	1		2		$+\infty$
f	?	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	?

c) En déduire que f admet sur $]1,+\infty[$ un minimum que l'on déterminera

d'après le T. de variations on a $f(2)$ est le minimum de f sur $]1,+\infty[$

2) le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $A(2,1)$, M un point de $(O,\vec{\imath})$ d'abscisse $x>1$. La droite (AM) coupe la droite $\Delta: y=x$ en un point N

a) montrer que $N\left(\frac{x}{x-1},\frac{x}{x-1}\right)$

$\vec{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} -b \\ a \end{matrix}$ $\quad ax+by+c=0$

$(AM): -x+(2-x)y+c=0$

$A(2,1)\in(AM) \Rightarrow$