Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

1) a) Montrer que pour tous réels distincts a et b de $]1,+\infty[$ on a

$f(b)-f(a)=(b-a)\left(1-\frac{1}{(a-1)(b-1)}\right)$

$$f(b)-f(a)=\frac{b^2}{b-1}-\frac{a^2}{a-1}=\frac{b^2(a-1)-a^2(b-1)}{(a-1)(b-1)}=$$

$$\frac{ab^2-b^2-a^2b+a^2}{(a-1)(b-1)}=\frac{ab^2-a^2b+a^2-b^2}{(a-1)(b-1)}=$$

$$=\frac{ab(b-a)+(a-b)(a+b)}{(a-1)(b-1)}=\frac{(b-a)(ab-a-b)}{(a-1)(b-1)}=$$

$$\frac{(b-a)(ab-a-b+1-1)}{(a-1)(b-1)}=$$

$$(b-a)\frac{(a-1)(b-1)-1}{(a-1)(b-1)}=(b-a)\left(1-\frac{1}{(a-1)(b-1)}\right)$$

b) Etudier alors le sens de variation de f sur $]1,2]$ et sur $[2,+\infty[$

$$f(b)-f(a)=\overset{+}{(b-a)}\left(1-\frac{1}{(a-1)(b-1)}\right)$$

Soit $1<a<b\leq 2$

$1<a\leq 2 \Rightarrow 0<a-1\leq 1$ et $0<b-1\leq 1$.

$0<(a-1)(b-1)\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{(a-1)(b-1)}\geq 1 \Rightarrow$

$1-\frac{1}{(a-1)(b-1)}\leq 0$ et comme $b-a>0$

$\Rightarrow f(b)-f(a)\leq 0$

$\Rightarrow f$ est $\searrow$ sur $]1,2[$.

dém? : sur $[2,+\infty[\Rightarrow f$ est $\nearrow$ sur $[2,+\infty[$

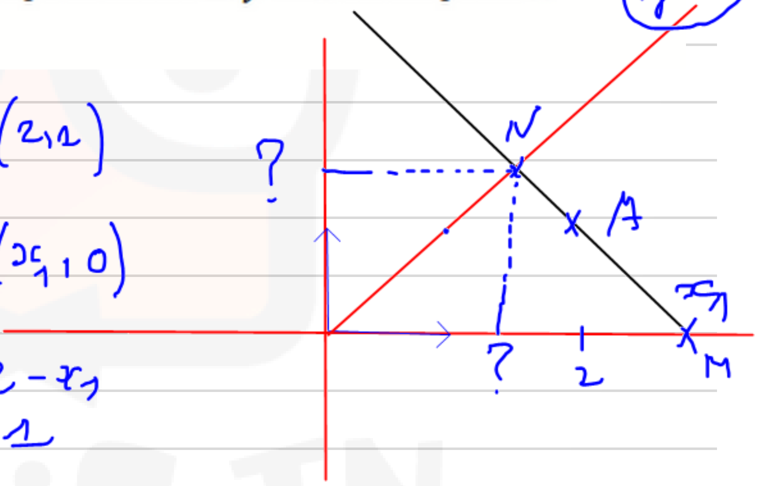
x	1		2		$+\infty$
f	?	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

c) En déduire que f admet sur $]1,+\infty[$ un minimum que l'on déterminera

d'après le T. de variations on a $f(2)$ est le minimum absolu de f sur $]1,+\infty[$

2) le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $A(2,1)$, M un point de $(O,\vec{\imath})$ d'abscisse $x>1$. La droite (AM) coupe la droite $\Delta: y=x$ en un point N

a) montrer que $N\left(\frac{x}{x-1},\frac{x}{x-1}\right)$



$N\left(\frac{x_1}{x_1-1},\frac{x_1}{x_1-1}\right)$ $\quad A(2,1)$

$N=(AM)\cap\Delta$. $\quad M(x_1,0)$

$\vec{AM}\begin{pmatrix} x_1-2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad -b \quad a \Rightarrow \quad b=2-x_1, \quad a=-1$

$\Rightarrow (AM): ax+by+c=0 \Rightarrow -x+(2-x_1)y+c=0$

et comme $A(2,1)\in(AM) \Rightarrow -2+(2-x_1)+c=0$

$\Rightarrow c=2-(2-x_1)=x_1$.

$\Rightarrow \boxed{(AM): -x+(2-x_1)y+x_1=0}$

$N=(AM)\cap D \Leftrightarrow \begin{cases} N\in(AM) \\ N\in\Delta \end{cases} \Leftrightarrow$

Soit $N(X,Y)$

$$\begin{cases} -x+(2-x_1)y+x_1=0 & (1) \\ x=y \end{cases} \iff \qquad \Delta : y=x$$

$(1) \Rightarrow -x+(2-x_1)x+x_1=0$

$\Rightarrow -x+2x-x_1x+x_1=0$

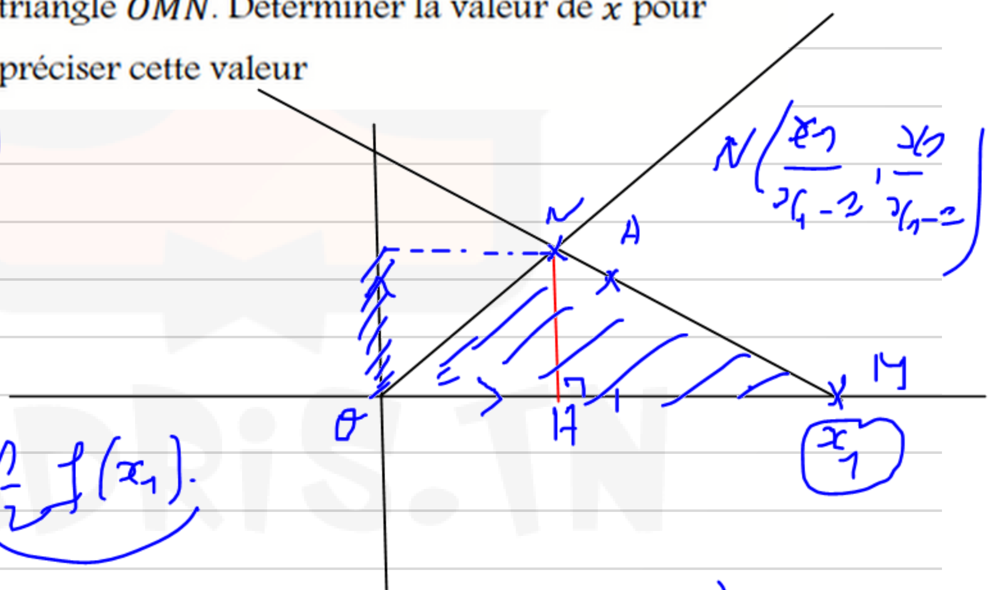
$\Rightarrow x-x_1x=-x_1$

$\Rightarrow x(1-x_1)=-x_1 \Rightarrow x=\dfrac{-x_1}{1-x_1}=\dfrac{x_1}{x_1-1}$

alors $y=x \Rightarrow y=\dfrac{x_1}{x_1-1}$ d'où :

$N\left(\dfrac{x_1}{x_1-1},\dfrac{x_1}{x_1-1}\right)$.

b) on désigne par $S(x)$ l'aire du triangle OMN. Déterminer la valeur de x pour laquelle $S(x)$ est minimale et préciser cette valeur



$S(x)=\frac{1}{2}OM \times NH$

$=\frac{1}{2}x_1 \times \dfrac{x_1}{x_1-1}$

$=\frac{1}{2}\dfrac{x_1^2}{x_1-1}=\frac{1}{2}f(x_1)$.

la v. minimal de $S(x)$ est la v. m de $\frac{1}{2}f(x_1)=$

$\frac{1}{2}\times$ la v. minimal de $f(x_1)=\frac{1}{2}\times f(2)=$

$\frac{1}{2}\times\dfrac{2^2}{2-1}=\frac{1}{2}\times 4=2$

Exercice n°4

1) soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ *par* $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$. Montrer que f est borné sur $]0,+\infty[$

On a : $\forall x>0$ $\qquad |A+B| \leq |A|+|B|$.

$$|f(x)| = \left|\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{x}{x+\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right| \leq$$

$$\left|\frac{x}{x+\sqrt{x}}\right| + \left|\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right| \leq 1+1 \leq 2.$$

$$\Rightarrow \quad -2 \leq f(x) \leq 2$$

$\Rightarrow$ f est bornée

2) soit g la fonction définie *par* $g(x)=\frac{x}{1+x^2}$. Montrer que g admet un maximum égal à $\frac{1}{2}$ *sur IR*

M que $g(x) \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$?

et il $\exists$ x tq $g(x) = \frac{1}{2}$.

$(1-x)^2 = 1+x^2-2x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*_+$

$\Rightarrow 1+x^2 \geq 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}^*_+$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*_+$

$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{2x} \quad \forall x>0$

$\Rightarrow g(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x>0.$

TADRIS.TN

et comme g est impaire alors $g(-x) = -g(x)$

$\forall x \leq 0$ on a $g(-x) = -g(x)$ car g impaire

on pose $-x = X \Rightarrow X > 0$

$$g(X) = -g(-X)$$

et on a $g(X) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$-g(-X) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$g(-X) \geq -1/2$$

$$g(x) \geq -\frac{1}{2} \quad \forall x \leq 0$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 1/2$

$g(x) = 1/2 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$1 + x^2 = 2x \Leftrightarrow 1 + x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow (1-x)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

d'où g admet un max en $x = 1$ qui est $1/2$.

3) soit h la fonction définie sur IR par $h(x)=\frac{x^2+2x}{|x+1|+1}$

a) montrer que -1 est le minimum de h sur IR

m que $h(x)\geq -1 \quad \forall x\in IR$?

on a : $h(x)+1=\frac{x^2+2x}{|x+1|+1}+1$

$$=\frac{x^2+2x+|x+1|+1}{|x+1|+1}=$$

1ᵉʳ cas : $x\geq -1 \Rightarrow x+1\geq 0 \Rightarrow |x+1|=x+1$

$$\Rightarrow h(x):\frac{x^2+3x+2}{x+2}=\frac{(x+1)(\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}}=x+1\geq 0$$

$$\Rightarrow h(x)\geq -1, \ \forall x\geq -1.$$

2ᵉ cas : si $x<-1 \Rightarrow x+1<0 \Rightarrow |x+1|=\underline{-x-1}$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{x^2+2x-x-1+1}{-x-1+1}=\frac{x^2+x}{-x}=-x-1>0$$

$$\Rightarrow h(x)\geq -1 \quad \forall x<-1.$$

donc $\forall x\in IR$: $h(x)\geq -1$

$$h(x)=-1 \Rightarrow \frac{x^2+2x}{|x+1|+1}+1=0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2+2x+|x+1|+1}{|x+1|+1}=0 \Rightarrow$$

$$x^2+2x+|x+1|+1=0$$

si $x > -1 \Rightarrow |x+1| = x+1$

$\Rightarrow x^2+3x+2 = 0$ admet des solution

car $a-b+c=0$

$\Rightarrow -1$ admet un antécédent.

2ᵉ cas si $x < -1 \Rightarrow |x+1| = -x-1$

$\Rightarrow \cancel{h(x)}\ x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0$

admet des solutions

$\Rightarrow -1$ est le minimum de h sur $\mathbb{R}$

c) montrer que h est une fonction affine par intervalles

d) tracer C_h dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$h(x) = \dfrac{x^2+2x}{|x+1|+1}$

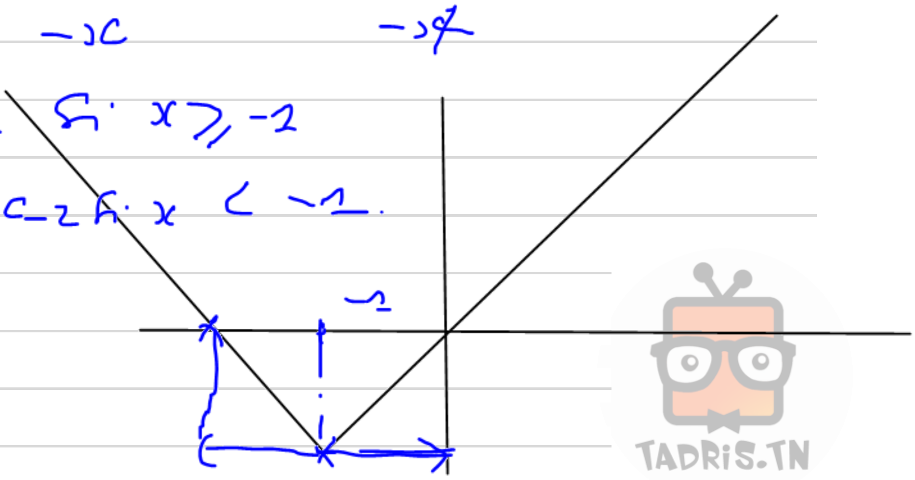
1ᵉʳ cas : si $x \geq -1 \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$

$\Rightarrow h(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+2} = \dfrac{x(\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}} = x$

2ᵉᵐᵉ cas : si $x \leq -1 \Rightarrow |x+1| = -x-1$

$\Rightarrow h(x) = \dfrac{x^2+2x}{-x} = \dfrac{\cancel{x}(x+2)}{-\cancel{x}} = -x-2$

$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq -1 \\ -x-2 & \text{si } x < -1. \end{cases}$

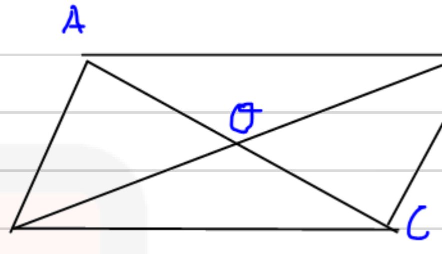


Exercice n°2

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O et K le barycentre des points pondérés $(C,2)$ et $(A,-3)$

1) Soit $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 - MC^2 = -AC^2\}$. Montrer que Δ est la droite perpendiculaire à (AC) en A

$M \in \Delta \iff MA^2 - MC^2 = -AC^2$



$\iff (\vec{MO}+\vec{OA})^2 - (\vec{MO}+\vec{OC})^2 = -AC^2$

$\iff \cancel{MO^2} + \cancel{OA^2} + 2\vec{MO}\cdot\vec{OA} - \cancel{MO^2} - \cancel{OC^2} - 2\vec{MO}\cdot\vec{OC} = -AC^2$

$\vec{MA}^2 = (\vec{MO}+\vec{OA})^2$

$2\vec{MO}(\vec{OA}-\vec{OC}) = -AC^2 \iff$

$2\vec{MO}\cdot\vec{CA} = -AC^2 \iff$

$2\vec{MO}\cdot\vec{CA} + AC^2 = 0 \iff -2\vec{MO}\cdot\vec{AC} + AC^2 = 0 \iff$

$\vec{AC}(-2\vec{MO} + \vec{AC}) = 0 \iff \vec{AC}(-2\vec{MO} + 2\vec{AO}) = 0 \iff$

$2\vec{AC}(\vec{AO} - \vec{MO}) = 0 \iff 2\vec{AC}\cdot\vec{AM} = 0$

$\vec{AC}\cdot\vec{AM} = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{AM}$

$\Rightarrow$ M décrit la $\perp$ à (AC) passant par A.

2) Soit $\mathcal{C} = \{M \in P \ tel \ que \ 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 3MA^2\}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{KA}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}KA^2$

K le bary de (A, -3) et (C, 2)

$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$

$\cancel{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{D}}$ $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{KA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AC} = -$

$= \overrightarrow{KA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}KA^2$

$2,3 \leq x \leq 2,4$

10^{-1}

l'ampli $= 2,4 - 2,3 = 0,1$

$x = 3,56778$

$3,5 \leq x \leq 3,6$

$3,56 \leq x \leq 3,57$