EXERCICE N°1

Soit (I_n) la suite définie par : $\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\,dt\,,\ n \in IN^* \end{cases}$

1/ a) Calculer I_0.

b) Calculer I_1 par une intégration par parties.

2/ En utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \in IN^*$ on a :

$I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \cos t\,dt$.

3/ a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)\,I_{n-2}.$$

b) En déduire I_2 et I_3. Puis la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2t+t^2-t^3)\sin t\,dt$

EXERCICE N°2

On pose pour tout $n \in IN^*$ $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$ et $J_n = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt$.

1/ Montrer que $\forall n \in IN^*$ $I_{n+1} = I_n - J_n$.

2/ En intégrant par parties , exprimer J_n en fonction de I_{n+1} puis calculer I_{n+1} en fonction de I_n.

3/ Montrer par récurrence que $\forall n \in IN^*$, $I_n = 2^n \dfrac{n!}{1.3.5........(2n+1)}$.

EXERCICE N°3

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt \\ U_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,dt\,,\ n \in IN^* \end{cases}$

1/ Calculer U_0 et U_1.

2/ Montrer que (U_n) est monotone.

3/ Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+t}$, établir que : $\dfrac{1}{n+1} \leq U_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.

4/ a) Montrer que : $\forall\ t \in [0,1]$ on a ; $\sqrt{1+t} \geq \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}(1-t)$.

b) En déduire que : $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1} - \dfrac{1}{2n^2} \leq U_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$.

EXERCICE N°4

1/ Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan x$.

a) Montrer que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,1]$. Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

c) En déduire que $f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ $\forall x \in [0,1]$.

2/ Soit $n \in IN^*$; $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^{2n}}\,dt$.

a) On pose $\varphi(t) = f^{-1}(t^n)$; $t \in [0,1]$. Prouver que φ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $\varphi'(t)$.

b) En déduire $I_n = \frac{\pi}{4n}$.

3/ Soit $J_n = \int_0^1 \frac{t^{3n-1}}{(1+t^{2n})^2}\,dt$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = -\frac{1}{4n} + \frac{1}{2} I_n$.

puis déduire J_n en fonction de n.

b) Utiliser les résultats précédentes pour calculer $A = \int_0^1 \frac{t+2t^5}{(1+t^4)^2}\,dt$

EXERCICE N°5

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \\ U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt, \quad n \in IN^* \end{cases}$

1/ Calculer U_0, U_1 et U_2.

2/ Montrer que : $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$.

3/ En déduire que : $\forall n \in IN$ on a : $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$.

4/ Montrer que : $(n+1)\,U_{n+1}\,U_n$ est indépendant de n, en déduire une expression de U_{2n+1} en fonction de n.

Exercice n°6

Soit $n \in IN^*$ et $I_n = \int_0^1 x^n \cos(\pi x)dx$ et $J_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$

1) Montrer que $J_1 = \frac{1}{\pi}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in IN^*$, $\pi I_{n+1} + (n+1)J_n = 0$.

b) Calculer alors I_2.

3) Montrer que $I_{n+2} = -\frac{(n+2)}{\pi^2}[1+(n+1)I_n]$

4) Calculer, alors, I_4 et J_3.

*f continue sur I * a ∈ I ⟹ ⟹La fonction F : $\mapsto \int_a^x f(t)dt$ et dérivable sur I F'(x)=f(x) (F primitive de f qui s'annule en a)

*f continue sur I *u dérivable sur J *u(J)⊂I *a ∈ I ⇒ La fonction F : $\mapsto \int_a^{u(x)} f(t)dt$ et dérivable sur J F'(x)=u'(x) f(u(x))

Exercice n°1:

Justifier la dérivabilité de F sur I et calculer sa fonction dérivée

1) $F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{dt}}{1+t^2}$, $I = \mathbb{R}$ 2) $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, dt$, $I = [1;+\infty[$

3) $F(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-\mathrm{t}^2}\, dt$, $I = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 4) $F(x) = \int_1^{\tan(x)} \frac{\mathrm{dt}}{1+t^2}$, $I = I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice n°2:

On considère la fonction f définie sur IR par : f(x)= $\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$,On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable sur IR et donner le sens de variation de f

2) Montrer que f est impaire.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$; on a: f(x) $\geq \frac{1}{2}x^2$.

b) Préciser la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

4) Soit la suite réelle I_n définie sur IN par : $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t^2}\,dt$

a) Calculer I_1 .

b) Montrer que la suite I_n est décroissante.

c) Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et calculer la limite de cette suite.

EXERCICE N°3

On définie la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{t}^{2n}}{1+\mathrm{t}^2}\,dt$

1) Montrer que $\forall n \in$ IN, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$ et calculer la limite de cette suite.

2) Soit F la fonction définie sur I= $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par F(x)= $\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$.

a) Montrer que F est dérivable sur I et calculer F'(x), $\forall x\in$ I.

b) Expliciter alors F(x), $\forall x\in$ I.

c) Calculer alors, U_0 .

3) a) Montrer que $U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1}$ $\forall n\in$ IN.

b) En déduire U_2.

4) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-........+\frac{(-1)^n}{2n+1}$

a) Exprimer V_n en fonction de U_0 et U_{n+1}(on distinguera les cas:n pair et n impair).

b) Calculer, alors, la limite de la suite (V_n)

Exercice n°4:

Soit la fonction f définie sur [1, $+\infty$ [par : f(x)= $x\sqrt{x^2-1}$ et on désigne par ξ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer ξ .

2) a) Montrer que f réalise une bijection de [1, $+\infty$ [sur IR_+ .

b) Tracer la courbe (ξ') de f^{-1} dans le même repère de ξ.

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par ξ , ξ', les axes du repère et la droite d'équation $x=\sqrt{2}$.

4) Soit l'ensemble C={ M(x,y); y= f(x) et $1\le x\le\sqrt{2}$ }. Calculer le volume du solide de révolution obtenu par rotation de C autour de l'axe (ox).

Exercice n°5:

1) Soit f la fonction définie sur I= $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\int_0^{\tan x}\frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

a) Montrer que f est dérivable sur I et déterminer f'(x).

b) En déduire que pour tout $x\in$ I, on a : f(x)= $\int_0^x \cos^2 t dt$.

c) Expliciter f(x) pour tout $x\in$ I, puis calculer l'intégrale A= $\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

2) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale B= $\int_0^1\frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}$.