

Mathématiques			
3 ^{ème} Math		Durée : 120 minutes	

Exercice N°:1 (4 points)

Le graphique ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé.

(C) admet trois asymptotes d'équations respectives $x = -1$, $y = 1$ et $y = \frac{x}{2} - 1$.

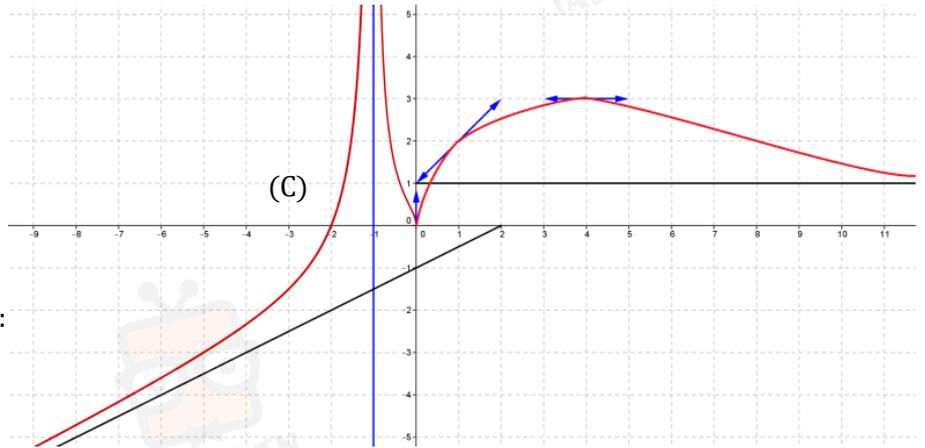
1) Par lecture graphique déterminer :

- a) Les domaines de définition et de dérivabilité de f.
- b) $f'(1)$ et $f'(4)$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \frac{x}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Déterminer en justifiant

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f(x)}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x) - x + 2}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + x^2 + 2x}{x^2 + 1}$ et d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{f^2(x) - 3f(x) + 2}$



Exercice N°:2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x \in [-2, 2] \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} - x + m & \text{si } x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

1) Montrer que f est continue en 2 si et seulement si $m = 2$.

Dans la suite de l'exercice on prend $m = 2$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x$ et interpréter le résultat obtenu.

4) Justifier que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-2, 2[$ et $]2, +\infty[$.

5) Soit $M(a, f(a)) \in (C_f)$ où $a \in [-2, 2]$ et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

a) Montrer que M appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

b) Déterminer alors une équation cartésienne de la tangente à (C_f) au points d'abscisse 1

c) Construire la partie de (C_f) sur $[-2, 2]$ en précisant les deux demi-tangentes aux points d'abscisses -2 et 2.





Exercice N°:3 (5 points)

Dans un plan orienté, muni d'un repère \mathcal{R} orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par ζ le cercle trigonométrique et par ζ' le cercle de centre O et de rayon 2 .

soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; On considère les points A, B et C tels que.

$B \in \zeta'$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) \equiv \alpha[2\pi]$, $A \in \zeta$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv 2\alpha[2\pi]$ et C le point tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

1) a) Donner les coordonnées polaires des points A et B

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B et C

2) Déterminer α tel que O, A et B sont alignés.

3) a) Montrer que $AB^2 = 9 - 8 \cos^2 \alpha$

b) Déterminer alors α pour que $OABC$ soit un rectangle.

4) Dans la suite de l'exercice $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathcal{A}(\alpha)$ désigne l'aire du parallélogramme $OABC$

a) Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2 \sin(2\alpha)$

b) pour quelle valeur de α on a $\mathcal{A}(\alpha)$ est maximale.

c) Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ Placer les points A, B et C dans le repère \mathcal{R} .

Exercice N°:4 (5 points)

Soit x un réel, on pose $A(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$

1) a) Montrer que pour tout réels a et b on a : $2 \sin a \cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

b) En déduire que pour tout réel x , on a ; $A(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

c) Calculer $A\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, en déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

d) Résoudre dans $[0, \pi]$, l'équation: $2A(x) + 1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

2) On pose $B(x) = \frac{\sin(2x) - 2\sqrt{3} \sin^2(x)}{2 \cos(2x) - 1}$

a) Déterminer l'ensemble E des valeurs de x pour que $B(x)$ existe

b) Montrer que pour tout réel de E , on a : $B(x) = \frac{\sin(x)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

c) Résoudre dans $[0, \pi]$, l'équation $B(x) = 1$

