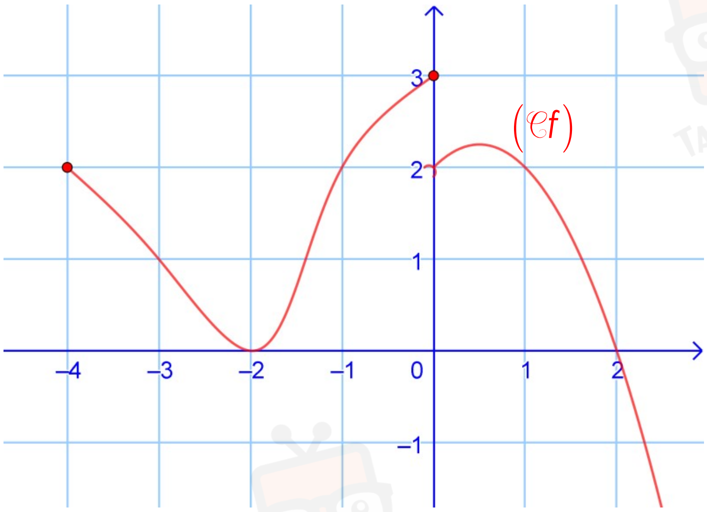
EXERCICE 1 (5pts)

Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthogonal la courbe $(\mathscr{C}f)$ d'une fonction f définie sur $[-4,+\infty[$.



1. On admet que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = ax^2 + bx + 2$.
   a- Montrer que $a = -1$ et $b = 1$.
   b- Déterminer $f([-1,1])$ et $f([0,+\infty[)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(f(x)) = 2$.
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{2 - f(x)}$.
   a- Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b- Déterminer le sens de variation de g sur $]-4,-2[$.

EXERCICE 2 (7pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + x - 1 & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1} & \text{si } x \in]-\infty,0] \end{cases}$.

1. a- Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α dans $\left[\dfrac{1}{3},1\right]$.
   b- Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x+2)(x^2 + x - 1)$.
   c- Déterminer la valeur exacte de α.
2. a- Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0]$, $\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \leq x^2 + 1$.
   b- Déduire que f est majorée par 1.
   c- Montrer que 1 est le maximum de f sur $]-\infty,0]$.

3. a- Montrer que f est minorée par -1 sur $]0,+\infty[$.

b- Montrer que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le minimum de f sur $]-\infty,0]$.

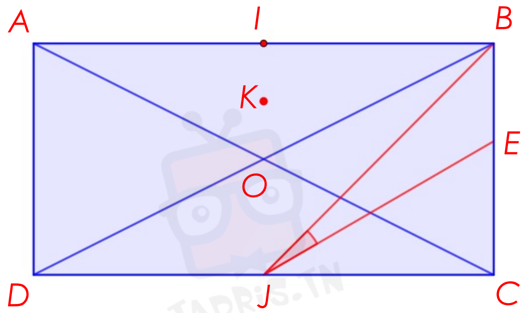
c- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=-3$.

EXERCICE 3 (8pts)

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O tel que $AB=8$ et $AD=4$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DC]$ et $[OI]$.

On note E le point de $[BC]$ tel que $\widehat{EJC}=\frac{\pi}{6}$.



1. a- Calculer JB, JE et EC.

b- Montrer que $\overrightarrow{JE}.\overrightarrow{JB}=16\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$.

c- Déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2. a- Montrer que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=2MO^2-24$.

b- Calculer $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$ et déduire $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD}$.

c- Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tels $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-22$.

3. a- Montrer que $\overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KB}=-19$.

b- Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan $\overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KM}=-19$.

4. a- Montrer que pour tout point M du plan $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MO^2+80$.

b- Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=160$.

Devoir De Contrôle N° 1 — $3^{ème}$ Math

Correction

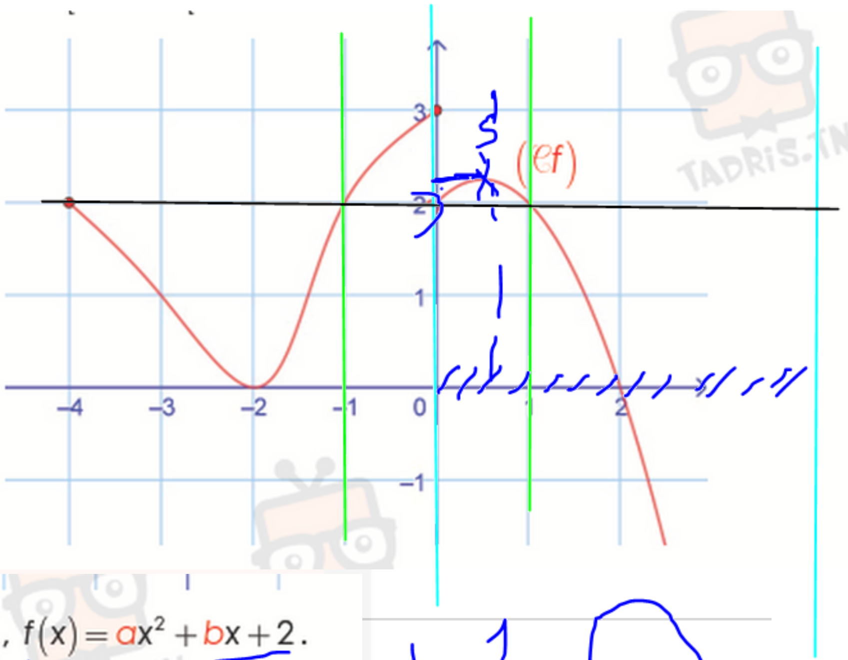
EXERCICE 1 (5pts)

$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b+2=0$ (1)

$f(1)=2 \Rightarrow a+b+2=2$ (2)

on aura :

$\begin{cases} a+b+2=2 \\ 4a+2b+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 & (1') \\ 2a+b=-1 & (2') \end{cases}$



1. On admet que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)=ax^2+bx+2$.

a- Montrer que $a=-1$ et $b=1$.

(1') $\Rightarrow a=-b$

(2') $\Rightarrow -2b+b=-1 \Rightarrow -b=-1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

revient à (1') on obtient $\boxed{a=-1}$

b- Déterminer $f([-1,1])$ et $f([0,+\infty[)$.

$f([-1,1[)=[2,3]$

$f([0,+\infty[)=f(\{0\}\cup]0,+\infty[)=$

$\{f(0)\}\cup f(]0,+\infty[)=$

$\{3\}\cup]-\infty,M]$ avec $M=$ le maximal de f sur $]0,+\infty[$

on a $f(x)=-x^2+x+2$

$=-\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right)$

$=-\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.

on a : $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0 \quad \forall x>0$

$\Rightarrow -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\leq \frac{9}{4}$.

donc $M = \frac{9}{4}$ et jamais atteint.

$f([0,+\infty[) =]-\infty, \frac{9}{4}] \cup \{3\}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l' équation $E(f(x)) = 2$.

$E(f(x)) = 2 \iff 2 \leq f(x) < 3$. $\quad [2,3[$

$\iff x \in [-1,1] \setminus \{0\} \cup \{-4\}$.

3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{2-f(x)}$.

a- Déterminer l'ensemble de définition de g. $\quad D_g \subset D_f$

$D_g = \{x \in D_f \text{ tq } f(x) \neq 2\}$.

$= [-4,+\infty[\setminus \{-4,-1,1\}$

$=]-4,+\infty[\setminus \{-1,1\}$.

b- Déterminer le sens de variation de g sur $]-4,-2[$.

Soit $a, b \in]-4,-2[$

$a \leq b \Rightarrow 2 \geq f(a) \geq f(b)$, car f est $\searrow$ sur $]-4,-2[$

$\Rightarrow -2 \leq -f(a) \leq -f(b) < 0$

$\Rightarrow 0 < 2-f(a) \leq 2-f(b) \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2-f(a)} \geq \frac{1}{2-f(b)}$

$\Rightarrow g$ est $\searrow$ sur $]-4,-2[$.

EXERCICE 2 (7pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+x-1 & \text{si } x\in\left]0,+\infty\right[\\ \dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2+1} & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right] \end{cases}$.

1. a- Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une solution α dans $\left]\frac{1}{3},1\right[$.

$*$ f $\underline{\underline{c}}$ sur $[\frac{1}{3},1]$

$*$ $1 \in f([\frac{1}{3},1])$ $f(\frac{1}{3})$ $f(1)$ $\Rightarrow f(x)=1$ admet au moins $\alpha\in[\frac{1}{3},1]$

$*$ f est un poly $\Rightarrow$ $\underline{\underline{c}}$ sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[\frac{1}{3},1]$

$* \to f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-1=-\frac{8}{27}$

$\to f(1)=4$

$\Rightarrow -\frac{8}{27}<1<4$

$\to$ d'après T.V.I on a $f(x)=1$ admet une solution $\alpha\in\left]\frac{1}{3},1\right[$

b- Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^3+3x^2+x-2=(x+2)(x^2+x-1)$.

c- Déterminer la valeur exacte de α.

on a : $f(\alpha)=1 \Leftrightarrow \alpha^3+3\alpha^2+\alpha-1=1$

$\Leftrightarrow \alpha^3+3\alpha^2+\alpha-2=0$

$\Leftrightarrow (\alpha+2)(\alpha^2+\alpha-1)=0$

$\Leftrightarrow \alpha=-2$ ou $\alpha^2+\alpha-1=0$

$\Delta=1+4=5$

à rejeter car $-2\notin[\frac{1}{3},1]$

$\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ V

2. a- Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0]$, $\sqrt{x^4+x^2+1} \le x^2+1$.

on a $\left(\sqrt{x^4+x^2+1}\right)^2 - (x^2+1)^2 =$

$\cancel{x^4}+x^2+\cancel{1}-\cancel{x^4}-2x^2-\cancel{1} = -x^2 \le 0 \Rightarrow$

$x^4+x^2+1 \le (x^2+1)^2 \Rightarrow$

$\sqrt{x^4+x^2+1} \le x^2+1$

$Y = x^2$

Y^2+Y+1

$\Delta = -3 < 0$

b- Déduire que f est majorée par 1.

on a : $\forall x \le 0 : \sqrt{x^4+x^2+1} \le x^2+1 \Rightarrow$

$\forall x \le 0 ; \dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2+1} \le 1$

c- Montrer que 1 est le maximum de f sur $]-\infty,0]$.

$f(0) = 1$ et comme $0 \in]-\infty,0] \Rightarrow 1$ est le maximum de f sur $]-\infty,0]$

3. a- Montrer que f est minorée par -1 sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[\Rightarrow x > 0 \Rightarrow x^3+7x^2+x > 0$

$x^3+7x^2+x-1 > -1$

$\Rightarrow f(x) > -1 \Rightarrow f$ est minorée par -1.

b- Montrer que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le minimum de f sur $]-\infty,0]$.

$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad f(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0\,?$

$\Leftrightarrow \frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{3}{4}$ / $\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{3}{4}\geq 0\,?$

$\Leftrightarrow 4x^4+4x^2+4=3x^4+6x^2+3 \Leftrightarrow$

$x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou

$x=1 \notin]-\infty,0]$.

donc $f^2(-1)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \underline{-1}$ est l'antécédent de $\frac{\sqrt{3}}{2}$

M que $f(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0\,?$

i.e M que $f(x)-\frac{3}{4}\geq 0$

$\frac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{3}{4}=$

$\frac{x^4+x^2+1-3(x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2}=$

$\frac{4x^4+4x^2+4-3x^4-6x^2-3}{4(x^2+1)^2}=$

$$\frac{x^4-2x^2+1}{4(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{4(x^2+1)^2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$f^2(x) \geq f^2(1) \Rightarrow f(x) \geq f(2)$$

donc $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le minimum de f sur $]-\infty,0]$.

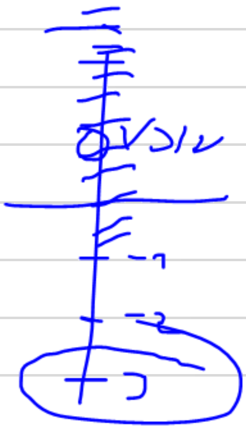
c- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=-3$.

On a $\forall x \in]-\infty,0]$, $f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) \geq -1$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq -1$.

$\Rightarrow f(x)=-3$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$



Tadris.TN : ÉTUDE EN LIGNE / DOUROUS DA3M & TADAROK
www.Tadris.TN Tadris.TN 55.635.666 26.222.159