Prof : Ben Rached .F	Epreuve : Mathématiques	
	Section : Sciences expérimentales	
	Classes:4ème année de l'enseignement secon	
	Durée :2h	Devoir de Contrôle N°1

Exercice N°1(7pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives a = $1+i\sqrt{3}$, b = $-\sqrt{3}+i$ et $c=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

1) a) Mettre a et b sous forme exponentielle

b) Construire les points A et B

2) a) Vérifier que $\frac{b}{a}=i$

b) En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O

3) a) Mettre $(1-i)$ sous forme exponentielle

b) En déduire que $(1-i)a=c$

c) Montrer que le quadrilatère OBAC est un parallélogramme

d) Construire alors le points C

4) a) Donner la forme algébrique de c

b) En déduire les valeurs exactes de $\sin(\frac{\pi}{12})$ et $\cos(\frac{\pi}{12})$

5)La perpendiculaire à la droite (OC) en O coupe le cercle Γ de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ en un point D d'affixe d dont la partie imaginaire est strictement positive

a) Construire le cercle Γ et le point D

b) Montrer que le quadrilatère OADB est un carré.

Exercice N°2(6pts)

On considère la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & si\ x<1\\ \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}} & si\ x\geq 1\end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)a) Montrer que pour tout $x<1$ on a : $\frac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

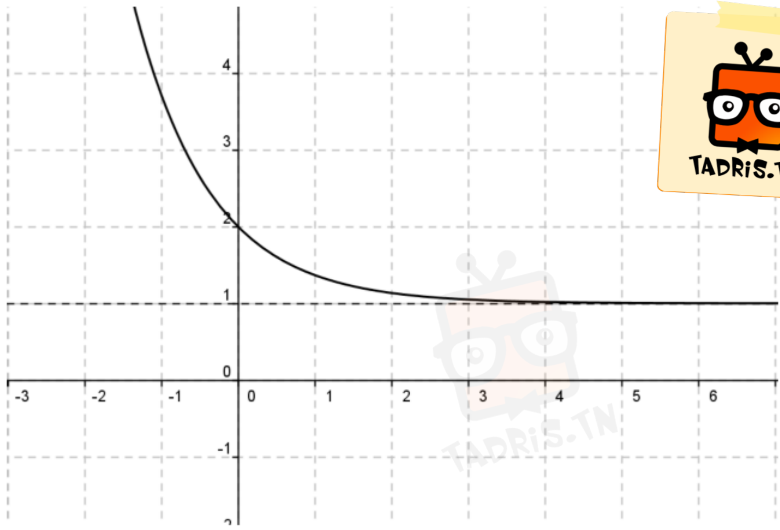
3)a)Sachant que $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1+\cos(\pi x)}{x-1}=0$ déterminer $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

b) Montrer que f est continue en 1

4)a) Montrer que f est continue sur $]-\infty;1[$

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in]-\frac{1}{2};0[$

5) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$



a) Déterminer g ([0, +∞ [ )

b) Calculer $gof(\alpha)$

c) Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty} fog(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} fog(x)$

Exercice N°3(7pts)

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2-U_n} \quad pour\ tout\ \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 < U_n < 1$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite ℓ.

2) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par ,$V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$.

a) Montrer que V est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Exprimer V_n en fonction de n

c) Déduire alors, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad U_n = \frac{1}{1+2^n}$

3) On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ et $S'_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S'_n = 2 - V_n$

b) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} S'_n$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq 1 + 2^n \leq 2^{n+1}$puis en déduire que $\frac{1}{2}V_n \leq U_n \leq V_n$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}S'_n \leq S_n \leq S'_n$

4)a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer un encadrement de sa limite